SÄTZE VOM RADON-NIKODYM-TYP FÜR OPERATOREN AUF BANACHVERBÄNDEN

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Wolfgang Haid
aus Stuttgart

1982

1983

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547619_0038

SÄTZE VOM RADON-NIKODYM-TYP FÜR OPERATOREN AUF BANACHVERBÄNDEN

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Wolfgang Haid
aus Stuttgart

1982

Tag der mündlichen Qualifikation: 14. 4. 1983
Dekan: Professor Dr. A. Schönhage
1. Berichterstatter: Professor Dr. H. H. Schaefer
2. Berichterstatter: Professor Dr. U. Schlotterbeck

REFO-DRUCK HANS VOGLER TÜBINGEN

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 3

0 Vorbemerkungen und Hilfsmittel 6

1 Bänder im Raum der regulären Operatoren zwischen Banachverbänden des Typs C(K) und $L^1(\mu)$ 15

2 Ein Radon-Nikodym-Satz für Verbandshomomorphismen und intervallerhaltende Operatoren 30

3 Approximationssätze in Hauptidealen von $\mathcal{L}^r(E,F)$ und deren Anwendungen 42

Literaturverzeichnis 66

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Raum $\mathcal{L}^r(E,F)$ der regulären Operatoren zwischen zwei Banachverbänden E und F. Unter einem regulären Operator versteht man in diesem Zusammenhang eine lineare Abbildung $T:E \longrightarrow F$, die sich als Differenz zweier positiver linearer Abbildungen darstellen läßt. Jeder reguläre Operator ist stetig, und wenn F ordnungsvollständig ist, so ist auch $\mathcal{L}^r(E,F)$, versehen mit der regulären Norm (der Operatornorm von $|T|$), ein ordnungsvollständiger Banachverband.

Ausgangspunkt der in dieser Arbeit dargestellten Überlegungen war die Frage, welche Zusammenhänge zwischen einem gegebenen positiven Operator $T:E \longrightarrow F$ und jenen Operatoren S bestehen, welche in dem von T in $\mathcal{L}^r(E,F)$ erzeugten Verbandsideal I(T) liegen. Der zur Untersuchung dieses Problems eingeschlagene Weg läßt sich folgendermaßen skizzieren: Unter gewissen Standardvoraussetzungen an die vorgegebenen Banachverbände E und F läßt sich der Vektorverband $\mathcal{L}^r(E,F)$ mit einem Verbandsideal in einem Raum stetiger Bilinearformen auf $C(X)\times C(Y)$ (X und Y geeignete kompakte Räume) identifizieren. Jenen Bilinearformen entsprechen aber Linearformen auf $C(X\times Y)$, also Radonmaße auf $X\times Y$. Auf diese Weise wird die ursprüngliche Problematik, die sich auf Operatoren zwischen Banachverbänden bezieht, auf eine besser bekannte skalare Situation zurückgeführt. Hier lassen sich nun Methoden der klassischen Maßtheorie, insbesondere etwa

der Satz von Radon-Nikodym, unmittelbar anwenden.
Ein gewisser Teil der Schwierigkeiten der ursprünglichen operatorentheoretischen Situation verbleibt dennoch: er liegt verborgen darin, daß die betrachteten Maße auf Produkträumen definiert sind. Diese Tatsache erschwert die Rückübersetzung der sich ergebenden skalaren Resultate zunächst beträchtlich, die Idee der Variablentrennung ermöglicht aber schließlich doch eine sinnvolle Interpretation der skalaren Überlegungen im Raum der regulären Operatoren.

Die so gewonnenen Einblicke in die Struktur von Verbandsidealen in Operatorenverbänden finden vor allem Anwendungen bei der Untersuchung von Kompaktheitseigenschaften regulärer Operatoren. Dabei zeigt sich, daß sich viele der in letzter Zeit mit anderen Methoden bewiesenen Resultate über positive kompakte Operatoren ([1],[5]) in natürlicher Weise aus den hier entwickelten Grundgedanken ableiten lassen. Durch die hier verwendete Betrachtungsweise erscheinen diese Resultate in einem neuen Licht, was zu Präzisierungen und Verallgemeinerungen in verschiedenen Richtungen führt; es werden auch bisher nicht erkennbare Querverbindungen offensichtlich.
Die Arbeit ist in vier Paragraphen unterteilt: Nach einem Paragraphen 0, welcher die benötigten Grundlagen bereitstellen soll, betrachtet Paragraph 1 den Raum $\mathfrak{L}^r(E,F)$ der regulären Operatoren für den Fall, in dem E und F spezielle Funktionenverbände sind. Zum einen ist das oben skizzierte

Konzept hier besonders einfach durchführbar und liefert rasch erste Ergebnisse. Zum anderen ist dieser Spezialfall fundamental für alle späteren Verallgemeinerungen.
Während in Paragraph 1 eine Vereinfachung der Überlegungen durch zusätzliche Voraussetzungen an die zugrundeliegenden Räume herbeigeführt wurde, steht im Mittelpunkt von Paragraph 2 die Untersuchung der Frage, durch welche Forderungen an die betrachteten Operatoren eine bessere Überschaubarkeit der Situation erzielt werden kann. Die Argumentation ist vor allem maßtheoretisch und liefert einen Radon-Nikodym-Satz für positive Operatoren, wie er erstmalig in [13] bewiesen wurde.
Im ersten Teil des Paragraphen 3 werden die Gedanken von Paragraph 1 wiederaufgenommen und weiter verallgemeinert. Im zweiten Teil werden als Anwendung in erster Linie positive kompakte und kompakt majorisierte Operatoren diskutiert.

Abschließend sei erwähnt, daß M.Wolff in [22] im Hinblick auf Anwendungen in der Spektraltheorie den hier eingeschlagenen Weg ein Stück weit verfolgt hat; ferner hat in jüngster Zeit B.de Pagter in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit mit anderen Methoden teilweise ähnliche Resultate erhalten.

Herrn Prof.Dr. H.H.Schaefer danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, sein Interesse und seine wertvollen Ratschläge.
Weiterhin gilt mein Dank auch Herrn Prof.Dr. U.Schlotterbeck für viele fruchtbare Diskussionen.

0. Vorbemerkungen und Hilfsmittel

Der Zweck dieses einleitenden Paragraphen ist es einerseits, die in der vorliegenden Arbeit verwendete Terminologie zu erklären und andererseits in knapper Form an die notwendigsten Grundlagen zu erinnern. Hinsichtlich aller Bezeichnungen und Zusammenhänge, die hierbei nicht angesprochen werden, sei auf das Buch "Banach Lattices and Positive Operators" von H.H. Schaefer [20] verwiesen, auf dessen Inhalt sich die ganze Arbeit aufbaut.

0.1

Ist K ein kompakter topologischer Raum, so bezeichne wie üblich C(K) den Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf K, versehen mit der Supremumsnorm. Dessen Dual (versehen mit der dualen Norm) bezeichnen wir mit M(K), die Elemente von M(K) werden, je nach Zusammenhang, als Radonmaße oder als reguläre Borelmaße auf K aufgefaßt. Ist für ein positives $\mu \in M(K)$ von $L^1(K,\mu)$ oder von $L^1(\mu)$ die Rede, so ist $L^1(K,\mathfrak{B},\mu)$ gemeint, wo $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen in K sei. Für jeden σ-endlichen Maßraum (X,Σ,ν) existiert ein kompakter Raum Z und ein $\mu \in M(Z)_+$, so daß $L^1(X,\Sigma,\nu)$ zu $L^1(Z,\mu)$ und $L^\infty(Z,\mu)$ zu C(Z) isomorph ist; diesen im folgenden häufig benutzten Sachverhalt erkennt man etwa aus dem Beweis von Th. II 8.5 in [20]. Z ist hierbei der Stonesche Darstellungs-

raum der zu (X,Σ,ν) gehörigen Maßalgebra ([20], II Ex.1).

0.2

Ist E ein Banachverband und $x \in E_+$, so sei I(x) das von x in E erzeugte Hauptideal, B(x) sei das von x erzeugte Hauptband; I(x) und B(x) seien jeweils mit der von E induzierten Topologie versehen. Dagegen bezeichnen wir mit E_x den AM-Raum, der entsteht, wenn man I(x) mit der Norm $y \longmapsto p_x(y) := \inf\{\gamma>0: y \in \gamma[-x,x]\}$ versieht. Ist x' eine positive Linearform auf E, so sei N(x') das Ideal $\{x \in E: \langle|x|,x'\rangle = 0\}$. Die Abbildung $x \longmapsto q_{x'}(x) := \langle|x|,x'\rangle$ liefert eine Norm auf $E/_{N(x')}$; die Vervollständigung von $E/_{N(x')}$ unter dieser Norm ist ein AL-Raum, der mit (E,x') bezeichnet wird. Da die Räume E_x und (E,x') im folgenden eine wichtige Rolle spielen, sollen sie nun etwas ausführlicher diskutiert werden.

0.3

Sei $x \in E_+$, E ein ordnungsvollständiger Banachverband, dann ist auch E_x ordnungsvollständig. Identifiziert man also E_x mit C(K), so ist K Stonesch. Der folgende einfache Satz zeigt, daß alle solchen Räume K bereits hyperstonesch sind ([20] II 9.3), falls E ordnungsstetige Norm besitzt.

Satz: Sei E ein Banachverband, $x \in E_+$. Genau dann ist [-x,x] schwachkompakt in E, wenn (nach Identifikation von E mit seinem kanonischen Bild in E") E_x der Dual von (E',x) ist.

Beweis: Man setze $E'/_{N(x)} = F$ und betrachte die (separierte) Dualität $\langle E_x, F\rangle$. Sei $[-x,x]$ $\sigma(E,E')$-kompakt, dann ist $[-x,x]$ auch $\sigma(E_x,F)$-kompakt ([21]IV 4.1 Cor.1). $[-x,x]$ ist die Einheitskugel von E_x, daher folgt mit dem Satz von Mackey-Arens ([21] IV 3.2), daß man E_x als Dual von F, F versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $[-x,x]$, auffassen kann. Dies ist aber die von der Norm $x' \mapsto \langle|x'|,x\rangle$ auf F induzierte Topologie. Ist umgekehrt E_x der Dual von (E',x), so ist $[-x,x]$ mit [21] III 4.3 $\sigma(E_x,F)$- und daher $\sigma(E,E')$-kompakt.

Man zeigt im übrigen leicht, daß der Dual von (E,x') für beliebiges $x' \in (E')_+$ mit $E'_{x'}$ identifiziert werden kann.

0.4

Bezeichnen für $x \in E_+$, $x' \in (E')_+$ $i_x: E_x \to E$, $j_{x'}: E \to (E,x')$ die kanonischen Abbildungen, so ist klar, daß i_x und $j_{x'}$ stetige Verbandshomomorphismen sind. $j_{x'}$ hat weiterhin die folgende wichtige Eigenschaft. (Für einen Vektorverband E bezeichne $E^{\times}_{oo}$ das Band der ordnungsstetigen Linearformen in seinem Ordnungsdual $E^{\times}$.)

Satz: Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband, $x' \in E^{\times}_{oo}$ positiv. Dann ist $j_{x'}(E)$ ein Ideal in (E,x').

Beweis: E ist die direkte Summe der Bänder N(x') und $N(x')^{\perp}$ ([20] II 4.10), daher genügt es zu zeigen (sei

$j_{x'}=j$), daß für alle $0<z \in N(x')^{\perp}$ $j[-z,z] = [-j(z),j(z)]$ gilt. Sei also ein solches z gegeben, dann ist $E_z = C(X)$ für einen Stoneschen Raum X, und x' definiert ein strikt positives, normales Maß ([20] S.121) μ auf X. $C(X)^{*}_{oo}$ trennt daher die Punkte von C(X), und mit ([20] II 9.3) folgt, daß $C(X) = (C(X)^{*}_{oo})' = L^{\infty}(X,\mu)$ ist. Folglich ist $E_z = L^{\infty}(X,\mu)$ ein Ideal in $(E_z,x') = L^{1}(X,\mu)$.
Die Einschränkung von $j:E \longrightarrow (E,x')$ auf E_z läßt sich durch (E_z,x') faktorisieren. Dort ist $[-z,z]$ schwachkompakt, also ist $j[-z,z]$ abgeschlossen in (E,x').
Damit ist die Behauptung bewiesen, denn mit 0.7 folgt, daß $\overline{j[-z,z]} = [-j(z),j(z)]$ gilt, weil $j':E'_{x'} \longrightarrow E'$ ein Verbandshomomorphismus ist.

Ist also in der Situation des Satzes x' sogar strikt positiv, so ist E verbandsisomorph zu einem Ideal in (E,x').

Im folgenden werden für einen Operator $T \in \mathcal{L}^{r}(E,F)$ (E und F Banachverbände, F ordnungsvollständig) oft die Abbildungen $j_{y'} \circ T \circ i_x$ für $x \in E_+$, $y' \in (F')_+$ von Interesse sein, diese nennen wir Bikompositionen von T (mit i_x und $j_{y'}$).

0.5

Sei E ein Banachverband, der einen quasiinneren Punkt u im positiven Kegel besitzt und sei K ein kompakter Raum, so daß $E_u = C(K)$ gilt. Man kann zeigen ([20] III 4.1), daß für jeden weiteren quasiinneren Punkt $v \in E_+$, E_v eben-

falls zu C(K) isomorph ist. Den bis auf topologische Isomorphie eindeutig bestimmten Raum K nennt man Strukturraum von E. Mit $C_\infty(K)$ bezeichnet man den Verband derjenigen stetigen numerischen Funktionen auf K, die mit Ausnahme einer raren Menge endlich sind ([20] S.109). In [20] III §4,§5 wird gezeigt, daß man E in natürlicher Weise mit einem Ideal von $C_\infty(K)$ identifizieren kann, welches C(K) umfaßt. Jedes $x' \in E'$ definiert ein Radonmaß auf K. Ist zusätzlich noch E ordnungsvollständig und $x' \in E'_{oo}$ strikt positiv, so kann man (E,x') auffassen als Raum derjenigen Funktionen in $C_\infty(K)$, welche μ-integrierbar sind. Hierbei ist μ das von x' auf K induzierte Maß; dies folgt aus [20] III 9.4.

Es werden nun einige, teils durch ordnungstheoretische, teils durch topologische Eigenschaften ausgezeichnete Operatorenklassen eingeführt, die für diese Arbeit von Bedeutung sind.

0.6

Sei E ein archimedischer Vektorverband und $T:E \longrightarrow E$ eine lineare und ordnungsbeschränkte Abbildung. T heißt Orthomorphismus, falls für je zwei orthogonale Vektoren x und y in E, T(x) und y wieder zueinander orthogonal sind. Wenn E ein Banachverband ist, so sind die Orthomorphismen von E gerade jene Operatoren in $\mathfrak{L}^r(E)$, die im Zentrum von E, (dem von der Identität in $\mathfrak{L}^r(E)$ erzeugten Ideal), liegen; daher werden sie in diesem Zusammenhang gelegentlich auch als Zentrumsoperatoren bezeichnet.

Ist E ein Banachverband, dessen positiver Kegel einen quasiinneren Punkt enthält, und identifiziert man E mit einem Unterverband von $C_\infty(K)$ (K der Strukturraum von E), so entsprechen den Orthomorphismen von E genau die Multiplikatoren $\tilde{p} \in \mathfrak{L}^r(E)$, wo $\tilde{p}(x) = \hat{x} \cdot \tilde{p}$ ($\hat{x}$ die zu $x \in E$ gehörige numerische Funktion) mit $p \in C(K)$ ist ([6] 2.4.4). Hiermit ist klar, daß sich für jeden quasiinneren Punkt u von E die Orthomorphismen von E_u und von E eineindeutig entsprechen. Ebenso sind, wenn E ordnungsvollständig und $x' \in E^\sim_{oo}$ strikt positiv ist, die Orthomorphismen von E und von (E,x') dieselben. Spezielle Orthomorphismen sind die Bandprojektionen auf E. Dies sind jene Projektionen P auf E (E ein Vektorverband), für welche $0 \leq P \leq id_E$ gilt. Ist E ein Banachverband mit quasiinnerem Punkt und Strukturraum K, so entsprechen den Bandprojektionen die Multiplikationen mit charakteristischen Funktionen offen-abgeschlossener Teilmengen von K.

0.7

Die folgenden Begriffsbildungen und der sich anschließende Satz sind nützliche Hilfsmittel ([11] §1).
Seien E und F Banachverbände und sei $T:E \longrightarrow F$ positiv.
Wenn für alle $x \in E_+$ $\overline{T[0,x]} = [0,Tx]$ gilt, so heißt T fast-intervallerhaltend; gilt $T[0,x] = [0,Tx]$ für alle $x \in E_+$, so heißt T intervallerhaltend.

Satz: Seien E,F und T wie eben, dann gilt:

(i) Genau dann ist T fast-intervallerhaltend, wenn

T' ein Verbandshomomorphismus ist.

(ii) Genau dann ist T ein Verbandshomomorphismus, wenn T' intervallerhaltend ist.

0.8

E und F seien Banachräume. Ein Operator $T:E \longrightarrow F$ heißt Dunford-Pettis Operator, wenn T jede schwachkonvergente Folge aus E auf eine normkonvergente Folge in F abbildet. T heißt schwacher Dunford-Pettis Operator, wenn für jeden Banachraum G und für jeden schwachkompakten Operator $S:F \longrightarrow G$ $S \circ T$ ein Dunford-Pettis Operator ist.
Besitzt der Raum E die Dunford-Pettis Eigenschaft (z.B. E ein AM- oder AL-Raum), so ist jeder schwachkompakte Operator in $\mathcal{L}(E,F)$ ein Dunford-Pettis Operator; besitzt E die reziproke Dunford-Pettis Eigenschaft (z.B. E ein Banachverband, dessen Dual ordnungsstetige Norm hat [9]), so ist jeder Dunford-Pettis Operator schwachkompakt.
Wie die kompakten und die schwachkompakten Operatoren bilden auch die Dunford-Pettis- und die schwachen Dunford-Pettis Operatoren norm-abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{L}(E,F)$, die bezüglich beidseitiger Komposition mit stetigen Operatoren invariant sind.

0.9

Eine weitere Operatorenklasse, die im folgenden von Interesse ist, bilden die nuklearen Operatoren. Ein Operator $T:E \longrightarrow F$ (E,F Banachräume) heißt nuklear, wenn er eine Darstellung $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i' \rangle y_i$ für alle $x \in E$ besitzt, wo-

bei (x_i') und (y_i) Folgen in E' und F sind, für welche $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\| \|y_i\| < \infty$ ist; das Infimum dieser Summen –genommen über alle geeigneten Folgen– heißt nukleare (oder π-) Norm von T. Wenn E' oder F die Approximationseigenschaft besitzt, kann man die nuklearen Operatoren in $\mathcal{L}(E,F)$ mit den Elementen der Vervollständigung von $E' \otimes F$ unter der π-Norm, also mit $E' \tilde{\otimes}_{\pi} F$ identifizieren.

Ist speziell $E = C(X)$ und $F = L^1(Y,\nu)$, so sind die nuklearen Operatoren in $\mathcal{L}(E,F)$ genau jene, für die ein Maß $\mu \in M(X)_+$ und eine Funktion $K \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ existiert, so daß für alle $f \in C(X)$ $Tf(t) = \int K(s,t)f(s)d\mu(s)$ (ν-fast überall) gilt. [20]

Sind E und F Banachverbände mit quasiinneren Punkten und Strukturräumen X und Y und ist noch F ordnungsvollständig, so definiert man in Verallgemeinerung der ebenerwähnten Operatoren: Ein regulärer Operator $T:E \longrightarrow F$ (E und F aufgefaßt als Vektorverbände in $C_\infty(X)$ bzw. $C_\infty(Y)$), heißt Kernoperator, falls für alle $0 \leq \nu \in F^*_{oo}$ ein $0 \leq \mu \in E'$ und ein $K \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ existiert, so daß für alle $f \in E$ gilt: $Tf(s) = \int K(s,t)f(s)d\mu(s)$ ν-fast überall. Diese Kernoperatoren verallgemeinern die für Anwendungen bedeutsamen Integraloperatoren auf Räumen p-fach integrierbarer Funktionen (siehe etwa [20] IV 9.8).

0.10

Abschließend soll noch vereinbart werden, wie der im folgenden häufig benutzte Begriff der Ordnungskonvergenz zu

verstehen sei. Sei hierzu E ein archimedischer Vektorverband. Ein Netz $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ in E heißt monoton fallend, falls $z_\alpha \leq z_\beta$ gilt, für alle $\alpha, \beta \in A$ mit $\alpha \geq \beta$.
Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Netz in E und $x \in E$, dann heiße $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in E ordnungskonvergent gegen x, wenn ein monoton fallendes Netz $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $\inf_\alpha z_\alpha = 0$ existiert, so daß für alle $\alpha \in A$ $|x_\alpha - x| \leq z_\alpha$ gilt.

1. Bänder im Raum der regulären Operatoren zwischen Banachverbänden des Typs C(K) und $L^1(\mu)$.

Dieser erste Paragraph beschränkt sich auf die Untersuchung des Raumes $\mathcal{L}^r(E,F)$ der regulären Operatoren zwischen zwei speziellen Typen von Banachverbänden: es wird der Fall betrachtet, daß E ein AM-Raum mit Ordnungseinheit und F ein AL-Raum mit schwacher Ordnungseinheit ist. Nach den bekannten Darstellungssätzen für solche Banachverbände genügt es, $E = C(K)$ und $F = L^1(Z,\mu)$ zu setzen, wobei sowohl K als auch Z ein kompakter topologischer Raum und μ ein positives Radonmaß auf Z ist.
Das Interesse an diesem Spezialfall wird dadurch gerechtfertigt, daß der Raum $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ in gewissem Sinne für alle Räume $\mathcal{L}^r(E,F)$ (E und F Banachverbände, F ordnungsvollständig) exemplarisch ist: die zu $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$ gehörigen, in 0.4 eingeführten Bikompositionen $j_{y'} \circ T \circ i_x$ ($x \in E_+$, $y' \in (F')_+$) beschreiben im wesentlichen das Verhalten von T. Dies sind aber Operatoren von einem AM-Raum E_x in den AL-Raum (F,y'). Somit wird verständlich, daß die Überlegungen dieses Paragraphen Grundlage aller in §2 und §3 bewiesenen, allgemeineren Ergebnisse sind.
Insbesondere soll im folgenden die Struktur des von einem beliebigen positiven Operator $T:C(K) \longrightarrow L^1(\mu)$ erzeugten Hauptbandes B(T) untersucht werden. Dies geschieht mit Hilfe des klassischen Satzes von Radon-Nikodym, welcher

bekanntlich die Hauptbänder im Raum M(Y) der Radonmaße auf einem gegebenen kompakten Raum Y als Räume $L^1(Y,\nu)$ charakterisiert. Dabei ist ν jenes Maß auf Y, welches das Hauptband erzeugt. Die Anwendung dieses skalaren Satzes auf den Operatorenverband $\mathfrak{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ wird ermöglicht durch dessen Einbettung in einen Raum von Radonmaßen, der sich aus Bild- und Urbildraum in einfacher Weise ergibt.

Der erste Satz präzisiert diesen Zusammenhang, zunächst soll jedoch die folgende Vereinbarung getroffen werden:

Wie in 0.1 erwähnt, kann man jeden AL-Raum mit schwacher Ordnungseinheit so als Raum $L^1(Z,\mu)$ darstellen, daß $L^1(Z,\mu)' = L^\infty(Z,\mu)$ in natürlicher Weise zu C(Z) isomorph ist. Sei $L^1(Z,\mu)$ im folgenden immer als solche Darstellung eines gegebenen AL-Raumes zu verstehen.

1.1 Satz: Sei K kompakt, $L^1(Z,\mu)$ wie oben. Dann ist $\mathfrak{L}^r(C(K),L^1(Z,\mu))$ als Banachverband isomorph zu einem Band in $M(K\times Z) = C(K\times Z)'$; der Isomorphismus $T \longmapsto m_T$ wird vermittelt durch:

$$\langle Tf,g\rangle = \int f\otimes g\,dm_T = \int_{K\times Z} f(t)g(z)\,dm_T(t,z)$$

für alle $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$.

Beweis: Seien $f_i \in C(K)$, $g_i \in C(Z)$ $(i = 1\ldots k)$, dann setzt sich die Zuordnung

$$\sum_{i=1}^{k} f_i\otimes g_i \longmapsto \sum_{i=1}^{k} f_i\cdot g_i \;:\; C(K)\otimes C(Z) \longrightarrow C(K\times Z)$$

zu einem Isomorphismus zwischen $C(K\times Z)$ und $C(K)\tilde{\otimes}_\varepsilon C(Z)$ fort. $(C(K)\tilde{\otimes}_\varepsilon C(Z))'$ kann aber mit dem Raum der integralen Operatoren von $C(K)$ nach $C(Z)'$ identifiziert werden. Hierbei entspricht $T\in \mathcal{L}^i(C(K),C(Z)')$ dem Radonmaß m_T auf $K\times Z$, das durch

$$\langle Tf,g\rangle = m_T(f\otimes g) = \int f\otimes g\, dm_T \text{ für alle } f\in C(K),\ g\in C(Z)$$

eindeutig bestimmt ist.

Weiter ist $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(Z,\mu))$ ein Band in $\mathcal{L}^r(C(K),C(Z)')$: man betrachte $P: \mathcal{L}^r(C(K),C(Z)') \longrightarrow \mathcal{L}^r(C(K),L^1(Z,\mu))$ mit $P(T) = p\circ T$, wobei $p: C(Z)' = L^\infty(Z,\mu)' \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ die Bandprojektion sei. P ist offensichtlich ebenfalls eine Bandprojektion.

Nun ist die Behauptung bewiesen, denn $\mathcal{L}^r(C(K), C(Z)')$ ist mit $\mathcal{L}^i(C(K), C(Z)')$ identisch ([20] IV 5.6).

Diese Identifikation von regulären Operatoren mit Radonmaßen erlaubt es, maßtheoretische Methoden bei der Untersuchung der Räume $\mathcal{L}^r(E,F)$ anzuwenden. Insbesondere ist die Frage von Interesse, welche Beziehungen zwischen Eigenschaften der Operatoren einerseits und Eigenschaften der zugehörigen Maße andererseits bestehen; Paragraph 2 enthält Beispiele solcher Beziehungen. Auch die nachstehende Bemerkung liefert hierfür ein erstes Beispiel.

1.2 Bemerkung Wie in 0.9 erwähnt, fallen in $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ die Kernoperatoren mit den nuklearen Operatoren zusammen. Jeder Kernoperator T besitzt hier also eine Darstellung

$Tf = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f,\omega_i\rangle\phi_i$ mit $\omega_i \in M(K)$, $\phi_i \in L^1(Z,\mu)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \|\omega_i\|\|\phi_i\| < \infty$. Einem solchen Operator entspricht aber das Maß $m_T = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \otimes (\mu.\phi_i)$, weil für alle $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$

$$\langle Tf,g\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f,\omega_i\rangle\langle \phi_i,g\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int f\otimes g\, d(\omega_i \otimes (\mu.\phi_i)) = \int f\otimes g\, dm_T$$

gilt. Setzt man $\omega = \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i|\cdot 2^{-i}$, so hat jedes Maß ω_i eine Dichte $\psi_i \in L^1(K,\omega)$ bezüglich ω. Hiermit ergibt sich:

$$\langle Tf,g\rangle = \int (f\otimes g)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\otimes\phi_i\Big)d(\omega\otimes\mu) = \Big\langle \int f\cdot\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\otimes\phi_i\Big)d\omega, g\Big\rangle ,$$

daher besitzt T den Kern $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\otimes\phi_i$ bezüglich ω.

In 1.10 wird sich zeigen, daß die nuklearen Operatoren ein Band in $\mathfrak{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ bilden, also entsprechen den Kernoperatoren in $\mathfrak{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ genau diejenigen Maße auf K×Z, die in dem von den Produktmaßen der Form $\omega\otimes(\mu.\phi)$ ($\omega \in M(K)$, $\phi \in L^1(\mu)$) erzeugten Band liegen.

Der folgende Radon-Nikodym Satz in $\mathfrak{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ ist eine direkte Konsequenz des in Satz 1.1 aufgezeigten Zusammenhangs.

1.3 Satz: Sei $T:C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ positiv. Dann ist das von T in $\mathfrak{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ erzeugte Band B(T) als Banachverband zu $L^1(K\times Z,m_T)$ isomorph, wobei m_T das gemäß 1.1 zu T gehörende Maß ist. Jedem Operator $S \in B(T)$ entspricht eine m_T-

integrierbare Funktion h auf K×Z durch

$$\langle Sf,g\rangle = \int (f\otimes g)\cdot h\,dm_T = \int_{K\times Z} f(t)\cdot g(z)\cdot h(t,z)\,dm_T(t,z)$$

für alle $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$.

Beweis: Man identifiziere mit Hilfe von 1.1 $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ mit einem Band in M(K×Z). Dem von T erzeugten Band B(T) entspricht das Band $B(m_T)$ in M(K×Z), dies ist gemäß dem Satz von Radon-Nikodym isomorph zu $L^1(K\times Z,m_T)$.
Ist m_S das zu S gehörende Maß, so existiert ein eindeutig bestimmtes $h \in L^1(K\times Z,m_T)$ mit $m_S = h.m_T$, daher gilt obige Formel.

Mit Hilfe dieses Satzes werden wir zeigen, daß zwischen jedem Operator S in B(T) und dem erzeugenden Operator T eine enge und für Anwendungen bedeutsame Beziehung besteht. Ein kurzer Blick auf den skalaren Fall läßt erkennen, welche Art von Beziehung erwartet werden kann.
Sei X ein kompakter Raum, ν ein positives Radonmaß auf X. Das kanonische Bild von C(X) liegt dicht in $L^1(X,\nu)$, dies bedeutet, daß die Maße $\omega = p.\nu$ mit $p \in C(X)$ in B(ν) dicht liegen. Diese Maße ω lassen sich aber, weil für alle f in C(X) $\omega(f) = \nu(f\cdot p)$ gilt, als $\omega = \nu \circ \tilde{p}$ deuten, wobei $\tilde{p}:C(X) \longrightarrow C(X)$ die Abbildung $f \longmapsto f\cdot p$ bezeichne.
Jedes Radonmaß in B(ν) läßt sich also in der L^1-Norm durch Maße approximieren, die aus ν durch Komposition mit Multiplikatoren entstehen.

Dieser Gedanke läßt sich in der im folgenden Satz beschriebenen Weise auf den Operatorenraum übertragen. Für $p \in C(K)$ bzw. für $q \in C(Z)$ bezeichne $\tilde{p}$ bzw. $\tilde{q}$ die Multiplikation mit p in C(K) bzw. mit q in $L^1(Z,\mu)$.

1.4 Satz: Sei $T:C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ positiv. Dann ist jeder Operator $S \in B(T)$ in der r-Norm Grenzwert einer Folge von Operatoren der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i \ ,$$

wobei für $1 \leq i \leq n$ p_i eine stetige Funktion auf K, q_i eine stetige Funktion auf Z ist.

Beweis: Man identifiziere B(T) gemäß Satz 1.3 mit $L^1(K\times Z, m_T)$. Bezeichnet man mit j die kanonische Abbildung von $C(K\times Z)$ nach $L^1(K\times Z, m_T)$, so ist offenbar $j(C(K)\otimes C(Z))$ dicht in $L^1(K\times Z, m_T)$.
Sei nun $h \in C(K)\otimes C(Z)$, $h = \sum_1^n p_i \otimes q_i$, dann entspricht j(h) einem Operator R in B(T), der sich folgendermaßen berechnet

$$\langle Rf,g\rangle = \int (f\cdot g)(\sum_1^n p_i\otimes q_i)dm_T = \sum_1^n \int (f\cdot p_i)\cdot(g\cdot q_i)dm_T =$$

$$\sum_1^n \langle T(f\cdot p_i), g\cdot q_i\rangle = \sum_1^n \langle q_i\cdot T(f\cdot p_i), g\rangle = \langle (\sum_1^n \tilde{q}_i \circ T\circ \tilde{p}_i)f, g\rangle .$$

Daher läßt sich jeder Operator S in B(T) in der r-Norm durch eine Folge von Operatoren der behaupteten Form approximieren.

Durch Weiterführung dieser Beweismethode erhält man den

folgenden analogen Approximationssatz für den Absolutbetrag eines nicht notwendig positiven, regulären Operators.

1.5 Satz: Sei $T:C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ ein regulärer Operator. Dann ist $|T|$ in der r-Norm Grenzwert einer Folge von Operatoren der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i \ ,$$

wobei für $1 \leq i \leq n$ $p_i \in C(K)$ und $q_i \in C(Z)$ ist.

Beweis: Wieder ist $B(|T|)$ isomorph zu $L^1(K\times Z,|m_T|)$, hierbei entspricht $T \in B(|T|)$ der Dichtefunktion $v \in L^1(|m_T|)$, für die $m_T = v.|m_T|$ gilt.
Es ist $v \in [-1,1]$ und $v^2 = 1$ fast-überall. Bezeichnet wieder $j:C(K\times Z) \longrightarrow L^1(|m_T|)$ die kanonische Abbildung, so läßt sich v in $L^1(|m_T|)$ durch eine Folge $(j(h_n))$ mit h_n aus $C(K)\otimes C(Z)$ approximieren. Man findet eine Teilfolge $(h_{n_k}) =: (h_k)$, so daß $j(h_k)$ punktweise fast überall gegen v konvergiert und durch ein $w \in L^1(|m_T|)$ beschränkt ist.
Folglich konvergiert $j(h_k)\cdot v$ fast überall gegen 1 und es ist $|j(h_k)\cdot v| = |j(h_k)| \leq w$; also konvergiert $j(h_k)\cdot v$ mit dem Satz von Lebesgue in $L^1(|m_T|)$ gegen 1.
Dies bedeutet, daß die zu $j(h_k)\cdot v$ gehörenden Operatoren R_k in der r-Norm gegen $|T|$ konvergieren. Sei etwa $h_k = \sum_1^r p_i\otimes q_i$, dann gilt für alle $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$:

$$\langle R_k f,g\rangle = \int (f\otimes g)(\sum_1^r p_i\otimes q_i)v\,d|m_T| = \int (f\otimes g)(\sum_1^r p_i\otimes q_i)\,dm_T =$$
$$\langle(\sum_1^r \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i)f,g\rangle,$$ damit ist die Behauptung bewiesen.

Bei genauerer Betrachtung der beiden letzten Beweise zeigt sich, daß man, falls im Urbildraum zusätzlich Ordnungsvollständigkeit vorliegt, die Form der approximierenden Operatoren weiter vereinfachen kann; dies soll als Folgerung formuliert werden.

1.6 Korollar: Sei in der Situation von Satz 1.4 bzw. von Satz 1.5 C(K) zusätzlich ordnungsvollständig. Dann können die approximierenden Operatoren von der Form

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i Q_i \circ T \circ P_i$$

gewählt werden, wobei für $1 \leq i \leq k$ P_i bzw. Q_i Bandprojektionen auf C(K) bzw. $L^1(\mu)$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sind.

Beweis: Sei $p \otimes q \in C(K) \otimes C(Z)$, dann gibt es, weil K und Z Stonesch sind, Folgen (ϕ_n) in C(K) und (ψ_n) in C(Z) mit $\phi_n \longrightarrow p$, $\psi_n \longrightarrow q$, wobei alle ϕ_n und ψ_n Linearkombinationen stetiger charakteristischer Funktionen sind.
Jedes $u \in C(K) \otimes C(Z)$ ist daher in der ε-Norm Grenzwert einer Folge (u_n), wo die u_n die Form

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i} \otimes \chi_{B_i}$ haben und die A_i bzw. B_i offen-abgeschlossene Mengen in K bzw. in Z sind.

In den vorangegangenen Beweisen kann man also die approximierenden Folgen aus $C(K) \otimes C(Z)$ durch Folgen dieses Typs ersetzen, und den Funktionen u_n entsprechen aber offenbar Operatoren der behaupteten Form (vgl. 0.6).

1.7 Bemerkung: Obige Operatoren des Typs $Q \circ T \circ P$, P und Q Bandprojektionen, die durch Multiplikation mit χ_A und χ_B (A und B offen-abgeschlossene Mengen) entstehen, sind Komponenten von T (T positiv). Als Komponenten eines Elements $x \geq 0$ in einem Vektorverband bezeichnet man jene $v \in [0,x]$, für die gilt: $v \wedge (x-v) = 0$. Man erkennt sofort daß für den Operator $Q \circ T \circ P$ diese Beziehung gilt, denn er entspricht der Funktion $\chi_A \otimes \chi_B = \chi_{A\times B} \in [0,1]$ in $B(T) = L^1(K\times Z, m_T)$; diese ist aber offensichtlich eine Komponente der Funktion 1.

Man erkennt hieraus auch, daß es sich dabei um sehr spezielle Komponenten von T handelt: die Menge aller Komponenten von T ($\hat{=} 1$) wird durch die Funktionen $\{\chi_M : M$ meßbare Teilmenge von $K\times Z\}$ dargestellt, die hierzu gehörenden Operatoren lassen sich aber im allgemeinen nicht explizit angeben.

Die Operatoren $\tilde{q} \circ T \circ \tilde{p}$ in Satz 1.4, wobei $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ Multiplikatoren mit stetigen Funktionen, also Orthomorphismen auf C(K) und $L^1(\mu)$ (vgl. 0.6) waren, sind dagegen, wie man sieht, im allgemeinen keine Komponenten von T.

Das folgende Korollar faßt die bisherigen Überlegungen für den Fall, daß C(K) nicht notwendig ordnungsvollständig ist, nocheinmal zusammen:

1.8 Korollar: Sei $T: C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ regulär. Dann ist die Menge der Operatoren der Form $\tilde{q} \circ T \circ \tilde{p}$, wo $\tilde{p}$ bzw. $\tilde{q}$ Orthomorphismus auf C(K) bzw. auf

$L^1(Z,\mu)$ ist, total in $B(|T|)$ bezüglich der r-Norm.

Beweis: Sei zunächst $S \in I(|T|)$, etwa $S \in [-|T|,|T|]$. Satz 1.4 angewandt auf S^+ und S^- liefert eine gegen S konvergente Folge von Operatoren der Form $\sum \tilde{q}_i \circ |T| \circ \tilde{p}_i$. Weiterhin läßt sich nach Satz 1.5 $|T|$ durch Operatoren R der Form $\sum \tilde{s}_j \circ T \circ \tilde{r}_j$ ($r_j \in C(K)$, $s_j \in C(Z)$) approximieren; aber es ist

$$\sum \tilde{q}_i \circ R \circ \tilde{p}_i = \sum_{i,j} (\tilde{s}_j \circ \tilde{q}_i) \circ T \circ (\tilde{p}_i \circ \tilde{r}_j) ,$$

daher kann S wie behauptet approximiert werden.
Weil $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu)) \subseteq M(K\times Z)$ AL-Raum ist, gilt $B(T) = \overline{I(T)}^r$, hiermit folgt die Behauptung.

Der Rest dieses Paragraphen soll Anwendungen des bisher Bewiesenen gewidmet sein. Es ist offensichtlich, daß die Sätze 1.4 und 1.5 verwendet werden können um zu zeigen, daß sich geeignete Eigenschaften regulärer Operatoren von T auf alle $S \in B(T)$ beziehungsweise von T auf $|T|$ übertragen. Die Grundlage für solche Anwendungen liefert der folgende, allgemein formulierte Satz. Dabei bezeichne $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Operatoren auf Banachverbänden, und für zwei Banachverbände E, F sei $\mathcal{E}^r(E,F)$ die Menge der regulären Operatoren zwischen E und F mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$.

1.9 Satz: Wenn $\mathcal{E}^r(C(K),L^1(\mu))$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ ist und wenn mit T auch

jeder Operator der Form $\tilde{q} \circ T \circ \tilde{p}$ $(p \in C(K),$ $q \in C(Z)$ Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat, so ist $\mathcal{E}^r(C(K),L^1(\mu))$ ein Band in $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$.

Beweis: $\mathcal{E}^r$ ist Unterverband, denn wegen Satz 1.5 ist mit T auch $|T|$ in $\mathcal{E}^r$; ebenso ist $\mathcal{E}^r$ Ideal, denn mit Satz 1.4 folgt, daß für positives T jedes $S \in [0,T]$ in $\mathcal{E}^r$ liegt. Folglich ist $\mathcal{E}^r$ als abgeschlossenes Ideal im AL-Raum $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ ein Band.

Wir diskutieren nun zwei naheliegende Beispiele für Eigenschaften $\mathcal{E}$, auf die sich Satz 1.9 anwenden läßt. Zunächst setzen wir für $\mathcal{E}$: T ist nuklear (oder äquivalent: T ist Kernoperator (0.9)). Weil die integrale Norm auf $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ mit der r-Norm zusammenfällt und weil $L^1(\mu)$ die Approximationseigenschaft besitzt ([20] IV 2.4), ist der Raum der nuklearen Operatoren $\mathcal{N}^r(C(K),L^1(\mu))$ gleich dem Abschluß von $M(K) \otimes L^1(\mu)$ in $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$; Satz 1.9 liefert also sofort:

1.10 Korollar: Die nuklearen Operatoren in $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ bilden ein Band.

Setzt man für $\mathcal{E}$: T ist kompakt, so erhält man das wichtige, erstmals von P.Dodds und D.Fremlin 1978 in [5] bewiesene Resultat:

1.11 Korollar: Die kompakten regulären Operatoren von $C(K)$ nach $L^1(\mu)$ bilden ein Band $\mathcal{K}^r(C(K),L^1(\mu))$ in $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$.

Beweis: Sei (T_n) eine Folge in $\mathcal{K}^r$, die in der r-Norm gegen ein $T \in \mathcal{L}(C(K),L^1(\mu))$ konvergiert, dann ist T kompakt und regulär; mit T ist auch $\tilde{q} \circ T \circ \tilde{p}$ kompakt.

1.12 Bemerkung: Es ist offensichtlich, daß jedes vollständige, normierte Operatorenideal $(\mathcal{A},N)$ (siehe etwa [18]), dessen Norm N auf $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ gröber als die r-Norm ist, ein weiteres Beispiel für solch eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ und damit eine Anwendung von Satz 1.9 liefert. Erwähnt seien etwa die Ideale der p-nuklearen Operatoren mit $1 \leq p < \infty$; hierbei ist allerdings zu bedenken, daß in $\mathcal{L}(C(K),L^1(\mu))$ für $2 \leq p < \infty$ die p-nuklearen Operatoren mit den kompakten zusammenfallen. Dies folgt aus [10] Th.4.3, siehe auch [19]. Also werden in den Korollaren 1.10 und 1.11 gerade die Grenzfälle p = 1 und p = 2 behandelt.

Korollar 1.11 ist wohl das wichtigste Resultat des vorliegenden Paragraphen, hierzu folgende Anmerkung:
D.H.Fremlin zeigte 1975 in [7] durch ein Gegenbeispiel, daß sich ein kompakter Operator in $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ im allgemeinen nicht in der r-Norm durch Operatoren endlichen Ranges approximieren läßt, daß also die nuklearen Operatoren (als Abschluß von $M(K) \otimes L^1(\mu)$ bezüglich der r-Norm) eine echte Teilmenge von $\mathcal{K}^r(C(K),L^1(\mu))$ bilden.
Als Folge ergab sich die Frage nach den Beziehungen dieses echt zwischen $\mathcal{N}^r(C(K),L^1(\mu))$ und $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ liegenden Raumes $\mathcal{K}^r(C(K),L^1(\mu))$ zur Ordnungsstruktur von

$\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$. Bei näherer Untersuchung dieser Frage erweist es sich als schwierig, von der Kompaktheit eines positiven Operators T auf die Kompaktheit jedes von T majorisierten, positiven Operators S zu schließen; aus der Kompaktheit von T scheint nicht unmittelbar zu folgen, daß S in der Operatornorm durch Operatoren endlichen Ranges approximierbar ist. Die bisherigen Beweise dieses Sachverhaltes ([5],[1]) machen vom Freudenthalschen Spektralsatz Gebrauch, hierbei wird S durch Komponenten von T monoton approximiert und ist daher kompakt, denn alle Komponenten von T sind kompakt, (dies zu zeigen ist dann das eigentliche Problem).
Der Vorteil der vorliegenden, vom Satz von Radon-Nikodym ausgehenden Approximationsmethode liegt darin, daß die Kompaktheit der approximierenden Operatoren $\sum \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i$ offensichtlich ist.

Sei für den Rest dieses Paragraphen $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft regulärer Operatoren auf Banachverbänden, die folgenden Bedingungen genügt: Sind G und H beliebige Banachverbände, so sei $\mathcal{E}^r(G,H)$, die Menge der regulären Operatoren mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$, ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}^r(G,H)$. Ist ferner $T \in \mathcal{E}^r(G,H)$ und sind für weitere Banachverbände G_1 und H_1 $R:G_1 \longrightarrow G$ und $S:H \longrightarrow H_1$ positive Operatoren, so soll $S \circ T \circ R \in \mathcal{E}^r(G_1,H_1)$ gelten.
Sind nun E und F Banachverbände (F ordnungsvollständig), so nennen wir $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$ AMAL-$\mathcal{E}$-Operator, wenn für alle $x \in E_+$, $y' \in (F^{\sim}_{oo})_+$ die Bikomposition $T_{x,y'} := j_{y'} \circ T \circ i_x$

in $\mathcal{E}^r(E_x,(F,y'))$ liegt.

Mit dieser Bezeichnung, die sich von dem in [5] eingeführten Begriff des AMAL-kompakten Operators ableitet, erhält man als weitere Folgerung aus 1.9:

1.13 Satz: Sei E ein beliebiger, F ein ordnungsvollständiger Banachverband. Sei ferner $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft regulärer Operatoren wie oben. Dann bilden die AMAL-$\mathcal{E}$-Operatoren ein Band in $\mathcal{L}^r(E,F)$.

Beweis: Sei für festes $x \in E_+$ und $y' \in (F^*_{oo})_+$ $\mathcal{E}_{x,y'} = \{T \in \mathcal{L}^r(E,F): T_{x,y'}$ besitzt $\mathcal{E}\}$. Weil $j_{y'}: F \longrightarrow (F,y')$ ein Verbandshomomorphismus auf ein Ideal ist und weil $j_{y'}(F)$ zu dem Band $N(y')^\perp$ isomorph ist, ergibt sich, daß die Abbildung $T \longmapsto T_{x,y'}$ ebenfalls ein Verbandshomomorphismus ist.

Seien $T,S,R \in \mathcal{L}^r(E,F)$ mit $0 \leq S \leq R$, T und R in $\mathcal{E}_{x,y'}$, dann ist $0 \leq S_{x,y'} \leq R_{x,y'}$ und $|T_{x,y'}| = |T|_{x,y'}$. Man kann nun $S_{x,y'}$ und $R_{x,y'}$ bzw. $T_{x,y'}$ und $|T|_{x,y'}$ als Operatoren in das von $R_{x,y'}(x)$ bzw. von $|T|_{x,y'}(x)$ erzeugte abgeschlossene Hauptideal auffassen, und Satz 1.9 liefert, daß auch $S_{x,y'}$ und $|T|_{x,y'}$ die Eigenschaft haben, also sind S und $|T|$ in $\mathcal{E}_{x,y'}$.

Ist schließlich (T_α) eine positive $(\leq)$-gerichtete Familie in $\mathcal{E}_{x,y'}$ mit $\sup_\alpha T_\alpha = T$ und ist $0 \leq z \in E_x$, dann gilt $(j_{y'} \circ T \circ i_x)z = j_{y'}(\sup_\alpha T_\alpha(z)) = \sup_\alpha j_{y'}(T_\alpha(z)) =$
$= (\sup_\alpha j_{y'} \circ T_\alpha \circ i_x)z$, also $T_{x,y'} = \sup_\alpha (T_\alpha)_{x,y'}$.

Faktorisiert man wieder durch das von $T_{x,y'}(x)$ erzeugte

abgeschlossene Hauptideal, so hat mit 1.9 $T_{x,y'}$ Eigenschaft $\mathcal{E}$, daher $T \in \mathcal{E}_{x,y'}$.
Nun folgt die Behauptung, denn die Menge der AMAL-$\mathcal{E}$-Operatoren ist der Durchschnitt über alle $\mathcal{E}_{x,y'}$, $x \in E_+$, $y' \in (F^*_{oo})_+$.

Insbesondere liefert dieser Satz natürlich, daß die AMAL-kompakten Operatoren in $\mathcal{L}^r(E,F)$ ein Band bilden, dies ist ein zentrales Resultat der Arbeit [5] von Dodds und Fremlin.

1.14 Bemerkung: Die "AMAL-nuklearen" Operatoren spielen ebenfalls eine wichtige Rolle: es sind dies, falls E und F quasiinnere Punkte besitzen, genau die in 0.9 eingeführten Kernoperatoren. Dies wurde von Nagel und Schlotterbeck in [15] bewiesen. Weiterhin wird dort gezeigt, daß, falls F^*_{oo} die Punkte von F trennt, das Band der AMAL-nuklearen Operatoren jenes ist, das von $E' \otimes F$, also den Operatoren endlichen Ranges, erzeugt wird.

2. Ein Radon-Nikodym-Satz für Verbandshomomorphismen und intervallerhaltende Operatoren.

In diesem Paragraphen werden die in Paragraph 1 dargestellten Überlegungen in einer etwas anderen Richtung weitergeführt. In §1 wurde gezeigt, daß man den Operatorenraum $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(Z,\mu))$ mit einem Raum von Maßen auf K×Z identifizieren kann, daß hierdurch für jedes Hauptband B(T) ein Isomorphismus auf einen Raum $L^1(K\times Z,m_T)$ vermittelt wird und daß deshalb die Operatoren der Form $\sum \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i$ in B(T) dicht liegen, weil nämlich die zugehörigen Maße auf K×Z gerade den Dichtefunktionen aus C(K)⊗C(Z) entsprechen.

Im vorliegenden Paragraphen werden nun Voraussetzungen über T gemacht, welche bewirken, daß bereits alle Operatoren in I(T) aus T durch Komposition mit nur einem Multiplikator hervorgehen, also von der Form $\tilde{q} \circ T$ oder $T \circ \tilde{p}$ sind. Dies folgt durch Anwendung des Satzes von Radon-Nikodym aus der Tatsache, daß in den betrachteten Fällen das zu T gehörige Maß m_T einen einfach beschaffenen Träger besitzt.

Die so für $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ gewonnenen Ergebnisse werden dann mit Hilfe der Darstellungstheorie für Banachverbände auf wesentlich allgemeinere Räume $\mathcal{L}^r(E,F)$ übertragen. Es ergibt sich, unter den durch den gewählten Zugang bedingten Voraussetzungen an E und F, jener Radon-Nikodym-

Satz von Luxemburg und Schep, der ein Hauptresultat in [13] darstellt.

Genauer handelt es sich bei obenerwähntem Zusammenhang zwischen Eigenschaften positiver Operatoren und Trägern der zugehörigen Maße um den folgenden Sachverhalt:

Die Forderungen: T ist Verbandshomomorphismus, oder: T ist ordnungsstetig und intervallerhaltend, haben zur Folge, daß die Träger der zugehörigen Maße "eindimensional" sind in dem Sinne, daß sie im Graphen einer stetigen Abbildung von Z nach K bzw. von K nach Z enthalten sind. Dies ist der Grundgedanke der beiden folgenden, nach einem Lemma bewiesenen Sätze.

Es sei vorab noch einmal an die in §1 getroffene Vereinbarung erinnert, unter $L^1(Z,\mu)$ immer jene Darstellung eines gegebenen AL-Raumes mit quasiinnerem Punkt zu verstehen, für welche $(L^1(Z,\mu))'$ mit C(Z) identifiziert werden kann (vgl. 0.1).

2.1 Lemma: Sei K ein Stonescher Raum, $T:C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ sei positiv, ordnungsstetig und fast-intervallerhaltend. Dann ist T intervallerhaltend.

Beweis: Sei $\omega = T'\mathbb{1}_Z \in M(K)$, $N = \{f \in C(K): \langle|f|,\omega\rangle = 0\}$, dann ist $L^1(K,\omega)$ die Vervollständigung von $C(K)/_N$ unter der Norm p_ω, wo $p_\omega(\phi) = \langle|\phi|,\omega\rangle$ ist.

Ist $j:C(K) \longrightarrow L^1(K,\omega)$ die kanonische Abbildung, so existiert wegen $T(N) = \{0\}$ eine lineare Abbildung T_o von $C(K)/_N$

nach $L^1(Z,\mu)$ mit $T = T_o \circ j$.

Weil $\|T_o(j(f))\| = \|Tf\| = \langle |Tf|, \mathbb{1} \rangle \leq \langle |f|, \omega \rangle$ ist, läßt sich T stetig auf $L^1(K,\omega)$ fortsetzen.

T ist ordnungsstetig, daher $T'(L^\infty(\mu)) \subseteq C(K)^*_{oo}$, also ist ω normales Maß auf K und K ist Stonesch, folglich ist j Verbandshomomorphismus auf ein Ideal (0.4). Weil T fast-intervallerhaltend war, gilt für $0 \leq f \in C(K)$:

$\overline{T[0,f]} = \overline{T_o(j[0,f])} = \overline{T_o[0,j(f)]} = [0,Tf]$.

Aber $[0,j(f)]$ ist schwachkompakt, also ist $T_o[0,j(f)]$ abgeschlossen, daher T intervallerhaltend.

Obiges Lemma ist Hilfsmittel im zweiten der angekündigten Sätze. Zunächst jedoch kurz zu den im folgenden auftretenden Bezeichnungen: Ist X ein kompakter Raum, μ ein reguläres Borelmaß auf X, so sei Supp(μ) der Träger von μ (dies ist das Komplement der Vereinigung aller offenen μ-Nullmengen). Ist Y ein weiterer kompakter Raum, $\phi: X \longrightarrow Y$ eine Borel-meßbare Abbildung, so bezeichne $\phi(\mu)$ das Bildmaß von μ unter ϕ, ($\phi(\mu)$ ist das Maß auf Y, für welches gilt: $\phi(\mu)(B) = \mu(\phi^{-1}(B))$ für alle Borelmengen B). Mit Graph(ϕ) ist die Menge $\{(x,\phi(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ gemeint.

2.2 Satz: Sei K kompakt, $T: C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ positiv. Sei m das gemäß 1.1 zu T gehörige Maß auf $K \times Z$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) T ist ein Verbandshomomorphismus.

(ii) Es existiert eine stetige Abbildung $\psi: Z \longrightarrow K$, so daß Supp(m) $\subseteq$ Graph(ψ) gilt.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei zunächst zusätzlich $T\mathbb{1}_K = \mathbb{1}_Z$. Weil das von $\mathbb{1}_Z$ in $L^1(Z,\mu)$ erzeugte Ideal mit $C(Z)$ identifiziert werden kann, hat T folgende Faktorisierung: $C(K) \xrightarrow{T_o} C(Z) \xrightarrow{j} L^1(Z,\mu)$. Sei nun $\psi:Z \longrightarrow K$ die zu dem Verbandshomomorphismus T_o assoziierte stetige Abbildung, G_ψ deren Graph und $\rho:Z \longrightarrow G_\psi$ die Abbildung $z \longmapsto (\psi(z),z)$. Für alle $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$ gilt dann:

$$\langle Tf,g\rangle = \int_{K\times Z} f\otimes g\,dm \quad \text{und} \quad \langle Tf,g\rangle = \langle f\circ\psi,g\rangle = \int_Z (f\circ\psi)\cdot g\,d\mu =$$

$$= \int_{G_\psi} f\otimes g\,d\rho(\mu) \text{ , daher ist } \mathrm{Supp}(m) \subseteq G_\psi = \mathrm{Graph}(\psi).$$

Sei nun nicht mehr notwendig $T\mathbb{1}_K = \mathbb{1}_Z$. Weil μ normal ist, definiert $T\mathbb{1}_K \in L^1(Z,\mu) = B(\mu) \subseteq M(Z)$ ein normales Maß ν auf Z. Dessen Träger Z_1 ist offen-abgeschlossen und ν ist strikt positiv auf Z_1, daher $L^\infty(Z_1,\nu) = C(Z_1)$. Faktorisiert man $T:C(K) \xrightarrow{T_1} L^1(Z_1,\nu) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$, so gilt nach dem oben Bewiesenen für das zu T_1 gehörige Maß m_1 auf $K\times Z_1$: $\mathrm{Supp}(m_1) \subseteq \mathrm{Graph}(\psi_1)$ für $\psi_1:Z_1 \longrightarrow K$ stetig. Aber $m \in M(K\times Z)$ ist auf $K\times Z_1$ konzentriert und stimmt dort mit m_1 überein, daher $\mathrm{Supp}(m) \subseteq \mathrm{Graph}(\psi)$ für jede stetige Fortsetzung $\psi:Z \longrightarrow K$ von ψ_1.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Hier betrachte man $\rho^{-1}:G_\psi \longrightarrow Z:(\psi(z),z) \longmapsto z$. Für $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$ gilt, weil m auf G_ψ konzentriert ist:

$$\langle Tf,g\rangle = \int_{K\times Z} f\otimes g\,dm = \int_{G_\psi} f\otimes g\,dm = \int_Z (f\circ\psi)\cdot g\,d\omega \text{ , falls man } \rho^{-1}(m) =$$

$= \omega$ setzt. Wählt man $f = \mathbb{1}_K$, erhält man $\langle T\mathbb{1}_K,g\rangle = \int_Z g\,d\omega =$

$= \int_Z (T\mathbb{1}_K) g d\mu$, also $\omega = (T\mathbb{1}_K).\mu$, daher

$\langle Tf, g\rangle = \int_Z (f\circ\psi)\cdot g\cdot(T\mathbb{1}_K)d\mu$, also $Tf = (f\circ\psi)\cdot(T\mathbb{1}_K)$, und man erkennt, daß T Verbandshomomorphismus ist.

Im zweiten Fall findet man, dual zum ersten Satz, die folgende Aussage:

2.3 Satz: Sei K ein Stonescher Raum, $T:C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ sei positiv und ordnungsstetig. Sei ferner m das gemäß 1.1 zu T gehörige Maß auf K×Z, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) T ist intervallerhaltend.

(ii) Es existiert eine stetige Abbildung $\gamma:K \longrightarrow Z$, so daß $Supp(m) \subseteq Graph(\gamma)$ gilt.

Beweis: (i)$\Longrightarrow$(ii) Sei zunächst zusätzlich T strikt positiv. Dann ist auch $T'\mathbb{1}_Z =: \omega \in M(K)$ strikt positiv; weiterhin ist ω normal weil T ordnungsstetig ist, und weil K Stonesch ist, hat man $L^\infty(K,\omega) = C(K)$. Faßt man T' als Operator nach $L^1(K,\omega)$ auf, so gilt für alle $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$: $\langle f, T'g\rangle = \int_{K\times Z} f\otimes g dm$; ferner ist T' Verbandshomomorphismus (0.7) und Satz 2.2 liefert, daß $Supp(m) \subseteq Graph(\gamma)$ ist für ein stetiges $\gamma:K \longrightarrow Z$.

Sei nun nicht mehr notwendig T strikt positiv. Dann betrachte man $N_T := \{f \in C(K): T|f| = 0\}$. N_T ist ein Band in C(K), weil T ordnungsstetig ist. Daher gibt es eine offen-abgeschlossene Teilmenge K_1 von K, so daß $T_1 := T_{|C(K_1)}$

strikt positiv ist. Ist m_1' das zu T_1 gehörige Maß auf $K_1 \times Z$, so ist wegen dem eben Bewiesenen $Supp(m_1) \subseteq Graph(\gamma_1)$ für ein stetiges $\gamma_1 : K_1 \longrightarrow Z$. Aber m ist auf $K_1 \times Z$ konzentriert und stimmt dort mit m_1 überein, daher gilt $Supp(m) \subseteq Graph(\gamma)$ für jede stetige Fortsetzung γ von γ_1 auf K.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\tau : Graph(\gamma) =: G_\gamma \longrightarrow K$ die Abbildung $(t, \gamma(t)) \longmapsto t$. Für $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$ gilt dann, weil m auf G_γ konzentriert ist:

$$\langle Tf, g \rangle = \int_{K \times Z} f \otimes g \, dm = \int_{G_\gamma} f \otimes g \, dm = \int_K f \cdot (g \circ \gamma) \, d\nu \quad , \text{ wenn man}$$

$\nu = \tau(m)$ setzt; und andererseits:

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T'g \rangle = \int_K f \, d(T'g), \text{ daher gilt } T'g = (g \circ \gamma).\nu.$$

Aber weil $\phi.\nu \longmapsto \phi : M(K) \longrightarrow L^1(\nu)$ Bandprojektion ist, hat man $|T'g| = |g \circ \gamma|.\nu = (|g| \circ \gamma).\nu = T'|g|$.
Also ist T' Verbandshomomorphismus, somit T fast-intervallerhaltend (0.7), und mit Lemma 2.1 folgt, daß T intervallerhaltend ist.

Man erkennt, daß man in (i) "intervallerhaltend" durch "fast-intervallerhaltend" ersetzen kann. Dies ist aber wegen Lemma 2.1 nur eine formale Abschwächung.

Gilt für ein zu einem positiven Operator T gehörendes Maß m_T auf $K \times Z$ Aussage (ii) von 2.2 bzw. von 2.3 und ist $m_S \in M(K \times Z)$ absolutstetig bezüglich m_T, etwa $m_S \in [0, m_T]$, so lassen sich, wegen der speziellen Gestalt der Träger,

unmittelbar Dichten h von m_S bezüglich m_T finden, welche die einfache Form $\mathbb{1}_K \otimes q$ bzw. $p \otimes \mathbb{1}_Z$ mit $p \in C(K)$, $q \in C(Z)$ besitzen. Dies erklärt, warum der zu m_S gehörende Operator S in der eingangs erwähnten Weise mit T zusammenhängt.
Die folgenden Korollare 2.4 und 2.5 präzisieren dies.
Hier seien wieder für $p \in C(K)$, $q \in C(Z)$ mit $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ die Multiplikationen mit p auf C(K) bzw. mit q auf $L^1(Z,\mu)$ gemeint.

2.4 Korollar: Sei K kompakt, $T:C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ ein Verbandshomomorphismus. Dann gibt es für jeden Operator $S \in [0,T]$ eine stetige Funktion q auf Z, so daß $S = \tilde{q} \circ T$ gilt.

Beweis: S und T sollen den Maßen m_S und m_T entsprechen. Wegen Satz 2.2 ist m_T und daher auch m_S auf $\mathrm{Graph}(\psi) =: G_\psi$ konzentriert. Wie im zweiten Teil des Beweises von 2.2 kann man m_T und m_S mit ρ^{-1} auf Z transformieren: sei $\omega_T = \rho^{-1}(m_T)$ und $\omega_S = \rho^{-1}(m_S)$. Weil $\omega_S \leq \omega_T$ ist, gibt es infolge des Satzes von Radon-Nikodym eine Funktion $q \in L^1(Z,\omega_T)$, so daß $\omega_S = q \cdot \omega_T$ gilt.
Aber ω_T ist normal: sei $g_\alpha \downarrow 0$ in C(Z), dann $\int_Z g_\alpha d\omega_T = <T\mathbb{1}_K, g_\alpha> \downarrow 0$, denn $T\mathbb{1}_K \in L^1(Z,\mu) = C(Z)^*_{oo}$. Ferner ist Z Stonesch, daher q sogar stetig (0.4), und für alle $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$ hat man:

$$<Sf,g> = \int_{K\times Z} f\otimes g\, dm_S = \int_Z (f\circ\psi) g\, d\omega_S = \int_Z (f\circ\psi) g q\, d\omega_T =$$

$$= \int_{K\times Z} (f\otimes g)(\mathbb{1}_K \otimes q)\, dm_T = \int_{K\times Z} f\otimes(g\cdot q)\, dm_T = <q\cdot Tf, g>, \text{ daher } S = \tilde{q}\circ T.$$

Aus Satz 2.3 ergibt sich:

2.5 Korollar: Sei K Stonesch, $T:C(K) \longrightarrow L^1(Z,\mu)$ positiv, ordnungsstetig und intervallerhaltend. Dann gibt es für jeden Operator $S \in [0,T]$ eine stetige Funktion p auf K, so daß $S = T \circ \tilde{p}$ gilt.

Beweis: Aus Satz 2.3 folgt, daß m_T und daher auch m_S auf $\mathrm{Graph}(\gamma) =: G_\gamma$ konzentriert ist, daher kann man wie im zweiten Teil des Beweises von 2.3 m_S und m_T mit τ auf K transformieren. Seien ν_S und ν_T die jeweiligen Bildmaße auf K. Wieder erhält man, weil $\nu_S \leq \nu_T$ ist, eine Dichte $p \in L^1(K,\nu_T)$, die ebenfalls sogar stetig ist, denn ν_T ist normal: sei $f_\alpha \downarrow 0$ in C(K), $\int f_\alpha d\nu_T = \langle Tf_\alpha, 1_Z \rangle \downarrow 0$, denn T ist ordnungsstetig und $1_Z \in C(Z) = (L^1(\mu))^*_{oo}$. Nach Voraussetzung ist K Stonesch, daher $p \in C(K)$. Also gilt für alle $f \in C(K)$, $g \in C(Z)$:

$$\langle Sf,g \rangle = \int_{K\times Z} f\otimes g\, dm_S = \int_K f\cdot(g\circ\gamma)\, d\nu_S = \int_K f\cdot(g\circ\gamma)\cdot p\, d\nu_T =$$

$$= \int_{K\times Z} (f\otimes g)(p\otimes 1_Z)\, dm_T = \int_{K\times Z} (f\cdot p)\otimes g\, dm_T = \langle T(f\cdot p), g\rangle ,$$

daher hat man $S = T \circ \tilde{p}$.

Der in diesen beiden Korollaren aufgezeigte Sachverhalt läßt sich nun mit Hilfe der Darstellungstheorie für Banachverbände beträchtlich verallgemeinern. Zunächst soll eine abkürzende Bezeichnung eingeführt werden.
Sind E und F Banachverbände, so sollen mit (V) die fol-

genden Voraussetzungen gemeint sein:

(V) E und F besitzen einen quasiinneren Punkt, F ist ordnungsvollständig und auf F existiert eine strikt positive, ordnungsstetige Linearform.

Diese Voraussetzungen erlauben, wie man auch in Paragraph 3 sehen wird, eine rasche Verallgemeinerung vieler, zunächst für $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ bewiesener Sätze. Den Grund hierfür zeigt das weiter unten formulierte Lemma.

Die Forderung, daß die betrachteten Banachverbände quasiinnere Punkte besitzen mögen, schränkt die Menge der in Frage kommenden Bild- und Urbildräume nicht wesentlich ein. Etwas stärker hingegen wird die Klasse der zulässigen Bildräume F durch die Forderung nach einer strikt positiven und ordnungsstetigen Linearform auf F eingegrenzt. Dennoch wird etwa der aus anwendungsorientierter Sicht wohl interessanteste Fall $E = L^p(X_1,\Sigma_1,\mu_1)$ und $F = L^q(X_2,\Sigma_2,\mu_2)$ in hinreichender Allgemeinheit ($1 \leq p,q \leq \infty$, (X_i,Σ_i,μ_i) σ-endliche Maßräume) mit erfaßt. (Für $F = L^q(\mu_2)$ $1 \leq q < \infty$ ist jede fast überall positive Funktion in $L^{q'}(\mu_2) = F^*_{oo}$ eine strikt positive Linearform auf F; für $F = L^\infty(\mu_2)$ nimmt man eine fast überall positive Funktion in $L^1(\mu_2)=F^*_{oo}$).

2.6 Lemma: Seien E und F Banachverbände, welche die Voraussetzungen (V) erfüllen. Sei u ein quasiinnerer Punkt in E und sei $v' \in F^*_{oo}$ strikt positiv. Dann ist die Abbildung

$$\Phi: \mathcal{L}^r(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}^r(E_u,(F,v')):T \longmapsto j\circ T\circ i$$

($i:E_u \longrightarrow E$, $j:F \longrightarrow (F,v')$ die kanonischen Abbildungen) ein injektiver Verbandshomomorphismus auf ein Ideal.

Beweis: Offensichtlich ist Φ positiv und mit j auch Φ injektiv. Auch Φ^{-1} ist positiv, denn sei $j \circ T \circ i \geq 0$, dann ist $j \circ T$ positiv auf E_u, daher auch auf E; weil j Verbandshomomorphismus ist, gilt dann $T \geq 0$.
$\Phi(\mathcal{L}^r(E,F))$ ist ein Ideal: Sei $S \in \mathcal{L}^r(E_u,(F,v'))$, $0 \leq S \leq \Phi(T)$ für ein $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$. Man muß noch zeigen, daß ein $\tilde{S} \in \mathcal{L}^r(E,F)$ existiert mit $\Phi(\tilde{S}) = S$. Zunächst ist $S(E_u) \subseteq F$, weil F ein Ideal in (F,v') ist (0.4). Betrachtet man S und T als Abbildungen von I(u) nach F, so gilt, weil $S \leq T$ und T stetig ist, $\|Sx\| \leq \|T\|\|x\|$ für alle $x \in I(u)$, daher besitzt S eine Fortsetzung $\tilde{S} \in \mathcal{L}^r(E,F)$.

Auf Grund dieses Sachverhaltes ist es nun leicht, in Verallgemeinerung von 2.4 und 2.5 folgenden Radon-Nikodym-Satz in $\mathcal{L}^r(E,F)$ zu beweisen:

2.7 Satz: Seien E und F Banachverbände, welche die Voraussetzungen (V) erfüllen, in (b) sei E zusätzlich ordnungsvollständig; I(T) sei das von T in $\mathcal{L}^r(E,F)$ erzeugte Ideal.

(a) $T:E \longrightarrow F$ sei ein Verbandshomomorphismus. Dann gibt es für alle $S \in I(T)$ einen Orthomorphismus $\tilde{q}$ auf F, so daß $S = \tilde{q} \circ T$ gilt.

(b) $T:E \longrightarrow F$ sei positiv, ordnungsstetig und inter-

vallerhaltend. Dann gibt es für alle $S \in I(T)$ einen Orthomorphismus $\tilde{p}$ auf E, so daß $S = T \circ \tilde{p}$ gilt.

Beweis: Sei u ein quasiinnerer Punkt in E, v' eine strikt positive, ordnungsstetige Linearform auf F, sei weiterhin etwa $E_u = C(K)$, $(F,v') = L^1(Z,\mu)$. Ist $S \in [0,T]$ gegeben, so betrachte man die Bilder $\Phi(S)$ und $\Phi(T)$ unter dem Verbandsisomorphismus Φ aus Lemma 2.6. $\Phi(T) = j \circ T \circ i$ ist in (a) als Komposition von Verbandshomomorphismen wieder ein solcher und in (b) ordnungsstetig und intervallerhaltend, weil auch i und j dies sind. Daher liefert Korollar 2.4 bzw. 2.5 (K ist in (b) Stonesch, weil E ordnungsvollständig ist) die Existenz einer Funktion $q \in C(Z)$ bzw. $p \in C(K)$, so daß $\Phi(S) = \tilde{q} \circ \Phi(T)$ bzw. $\Phi(S) = \Phi(T) \circ \tilde{p}$ gilt.
Durch Einschränkung von $\tilde{q}$ auf F bzw. Fortsetzung von $\tilde{p}$ auf E (man beachte 0.5 und 0.6) erhält man die gesuchten Orthomorphismen. Die Verallgemeinerung für $S \in I(T)$ ist klar.

Betrachten wir abschließend obige Aussagen aus der Sicht des Falles $E = C(K)$ und $F = \mathbb{R}$, also $\mathcal{L}^r(E,F) = M(K)$. Bekanntlich sind die Verbandshomomorphismen in M(K) genau die skalaren Vielfachen der Diracmaße ε_t, $t \in K$. Ist $\mu \in I(\varepsilon_t)$, so ist μ wieder auf $\{t\}$ konzentriert und unterscheidet sich daher nur um einen Skalarfaktor $q \in \mathbb{R}$ von ε_t, also gilt tatsächlich $\mu = \tilde{q} \circ \varepsilon_t$.
Sei im zweiten Fall K Stonesch und ν ein normales Maß auf K.

Die Maße in $I(\nu)$ entsprechen den Maßen mit Dichten aus $L^\infty(K,\nu)$ bezüglich ν, und jede Klasse in $L^\infty(\nu)$ enthält im vorliegenden Fall eine stetige Funktion. Ist daher $\mu \in I(\nu)$, so gilt $\mu(f) = (p.\nu)(f) = \nu(p \cdot f)$ für ein $p \in C(K)$ und alle $f \in C(K)$, also $\mu = \nu \circ \tilde{p}$.

Man erkennt im übrigen bereits an diesem einfachen Fall, daß man nicht für alle $S \in B(T)$ eine solche Darstellung erwarten kann. Aber offensichtlich existiert zu jedem positiven $S \in B(T)$ eine aufsteigende Folge von Orthomorphismen $(\tilde{q}_n)$ bzw. $(\tilde{p}_n)$, so daß $S = \sup_n(\tilde{q}_n \circ T)$ bzw. $S = \sup_n(T \circ \tilde{p}_n)$ gilt.

3. Approximationssätze in Hauptidealen von $\mathcal{L}^r(E,F)$ und deren Anwendungen.

Der vorliegende Paragraph ist in mehrere Teile gegliedert. Im ersten Teil sollen die in §1 für den Fall $E = C(K)$ und $F = L^1(\mu)$ bewiesenen Resultate auf allgemeinere Situationen übertragen werden. Die weiteren Teile sind den Anwendungen der Ergebnisse des ersten Teils gewidmet, es werden insbesondere kompakte Operatoren auf Banachverbänden untersucht. Hierbei wird sich erweisen, daß sich die von Dodds und Fremlin beziehungsweise von Aliprantis und Burkinshaw gefundenen Resultate über die Kompaktheit regulärer Operatoren ([1],[5]) in natürlicher Weise aus dem vorliegenden Ansatz ableiten lassen, daß aber die entwickelten Methoden auch verschiedene Verallgemeinerungen und Erweiterungen jener Resultate nahelegen. Zum Teil werden hierzu Überlegungen zu Hilfe genommen, die bereits von Nagel und Schlotterbeck in [16] bei der Untersuchung von Kernoperatoren verwendet wurden.
Abschließend werden Dunford-Pettis Operatoren (0.8) behandelt; es zeigt sich, daß die zuvor dargestellten Methoden es erlauben, eine von Aliprantis und Burkinshaw in[3] gestellte, diese Operatorenklasse betreffende Frage zu beantworten.

Die Verallgemeinerung der Überlegungen des ersten Paragraphen wird ermöglicht durch die Tatsache, daß man unter

den in §2 eingeführten Voraussetzungen (V) an E und F $\mathcal{L}^r(E,F)$ als Verbandsideal in $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ ($C(K)$, $L^1(\mu)$ passend) auffassen kann. Nach entsprechenden Modifikationen werden somit die Approximationssätze 1.4 und 1.5 in $\mathcal{L}^r(E,F)$ anwendbar und liefern dort ähnliche, wenn auch im allgemeinen schwächere Approximationsaussagen als in dem in §1 betrachteten Fall. Dennoch besitzen sie eine Vielzahl von Anwendungen; hierbei stellt sich heraus, daß man die einschränkenden Voraussetzungen an E und F schließlich fast immer eliminieren kann.

Zur Vorbereitung des ersten Satzes noch folgende Bemerkungen: Wir fassen E gemäß 0.5 als Unterverband von $C_\infty(K)$ auf, wo K der Strukturraum von E ist; für $x \in E$ sei $\hat{x}$ die entsprechende Funktion in $C_\infty(K)$. Ist $v' \in F^\times_{oo}$ strikt positiv, so ist $(F,v') = L^1(Z,\mu)$ und $(F,v')' = F'_{v'} = C(Z)$, wo Z der Strukturraum von F ist (0.3, 0.5). Sei für $y' \in F'_{v'}$, $\hat{y}$ die zugehörige stetige Funktion auf Z. $F'_{v'}$ trennt die Punkte von F.
Satz 3.1 ist eine direkte Verallgemeinerung der Integraldarstellung für reguläre Operatoren von $C(K)$ nach $L^1(\mu)$ des Satzes 1.1. Bezüglich der Voraussetzungen (V) sei auf §2 verwiesen.

3.1 Satz: Seien E und F Banachverbände, welche die Voraussetzungen (V) erfüllen; u sei ein quasiinnerer Punkt in E, $v' \in F^\times_{oo}$ sei strikt positiv, K

und Z seien die Strukturräume von E und F.

Dann gibt es zu jedem $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$ genau ein Maß $m_T \in M(K\times Z)$, so daß für alle $x \in E$, $y' \in F'_v$, gilt:

$$\langle Tx,y'\rangle = \int \hat{x}\cdot\hat{y}\,dm_T = \int_{K\times Z} \hat{x}(t)\hat{y}(z)\,dm_T(t,z).$$

Beweis: Gemäß Satz 1.1 gibt es genau ein Maß $m_T \in M(K\times Z)$, so daß für alle $x \in E_u = C(K)$ und alle $y' \in F'_v, = C(Z)$ gilt:

$\langle Tx,y'\rangle = \int \hat{x}\cdot\hat{y}\,dm_T$.

Sei jetzt T positiv, $x \in E_+$, $y' \in (F'_v,)_+$, dann wird x in E durch die Folge (x_n) mit $x_n = x \wedge nu$ monoton approximiert. Die x_n sind in E_u, für alle $(t,z) \in K\times Z$ gilt:

$\hat{x}_n(t)\cdot\hat{y}(z) \uparrow \hat{x}(t)\cdot\hat{y}(z)$, und die Folge der $\int \hat{x}_n\cdot\hat{y}\,dm_T$ ist wegen $\int \hat{x}_n\cdot\hat{y}\,dm_T = \langle Tx_n,y'\rangle$ eine Cauchyfolge. Daher folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, daß $\hat{x}\cdot\hat{y}$ m_T-integrierbar ist und daß $\langle Tx,y'\rangle = \int \hat{x}\cdot\hat{y}\,dm_T$ gilt.

Der Beweis für T, x und y nicht notwendig positiv ist nach jeweiliger Zerlegung in Positiv- und Negativteil offensichtlich.

Zur Verallgemeinerung der Sätze 1.4 und 1.5 wird wieder Lemma 2.6 herangezogen; unter den Voraussetzungen (V) (siehe §2) wird $\mathcal{L}^r(E,F)$ vermöge Φ verbandsisomorph zu einem Ideal in $\mathcal{L}^r(E_u,(F,v'))$. Es ist klar, daß Φ im allgemeinen kein topologischer Isomorphismus sein kann, denn $\mathcal{L}^r(E_u,(F,v'))$ ist ein AL-Raum. Dies macht verständlich, daß man die topologischen Approximationsaussagen der Sätze 1.4 und 1.5 nicht direkt mittels Φ auf $\mathcal{L}^r(E,F)$ über-

tragen kann. Es wird in den Beweisen der darauffolgenden Sätze klar, daß das folgende Lemma es erlaubt, die Aussagen von 1.4 und 1.5 in geeigneter Weise zu modifizieren.

3.2 Lemma: Seien K und Z kompakte Räume, sei $m \in M(K\times Z)_+$; sei ferner $j:C(K\times Z) \longrightarrow L^1(K\times Z,m)$ die kanonische Abbildung. Dann existiert zu jeder Funktion $h \in L^\infty(K\times Z,m)$ eine Folge (ϕ_n) in $C(K)\otimes C(Z)$, so daß die Folge der $j(\phi_n)$ in $L^\infty(K\times Z,m)$ ordnungsbeschränkt ist und h in der Norm von $L^1(K\times Z,m)$ approximiert.

Beweis: Sei o.B.d.A. $h \in [-\mathbf{1},\mathbf{1}] \subseteq L^\infty(K\times Z,m)$.
Weil $j':L^\infty(K\times Z,m) \longrightarrow M(K\times Z)$ ein Verbandshomomorphismus ist, ist j fastintervallerhaltend (0.7). Daher existiert eine Folge (ψ_n) in $C(K\times Z)$ mit $|\psi_n| \leq \mathbf{1}$ und $j(\psi_n) \longrightarrow h$ in $L^1(m)$. Zu jedem ψ_n findet man ein $\phi_n \in C(K)\otimes C(Z)$, so daß $\|\psi_n - \phi_n\| \leq n^{-1}$ gilt; dann ist $|\psi_n - \phi_n| \leq n^{-1}\cdot\mathbf{1}$, daher $|\phi_n| \leq |\phi_n - \psi_n| + |\psi_n| \leq (1+n^{-1})\cdot\mathbf{1}$. Also
$|j(\phi_n)| = j(|\phi_n|) \leq 2\cdot\mathbf{1}$ und
$\|j(\phi_n) - h\|_{L^1} \leq \|j\|\|\phi_n - \psi_n\|_\infty + \|j(\psi_n) - h\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Der nachstehende Satz stellt die angekündigte Verallgemeinerung von Satz 1.4 dar. Man erkennt, daß er die Aussage von Satz 1.4 in der Tat enthält, wenn man beachtet, daß $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(\mu))$ als AL-Raum ordnungsstetige Norm besitzt. Hinsichtlich des Begriffs der Ordnungskonvergenz beachte man 0.10.

3.3 Satz: Seien E und F Banachverbände, welche die Voraussetzungen (V) erfüllen und sei $T:E \longrightarrow F$ positiv. Dann ist jeder Operator $S \in I(T)$, dem von T in $\mathcal{L}^r(E,F)$ erzeugten Ideal, Grenzwert einer in I(T) ordnungskonvergenten Folge von Operatoren der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i \ ,$$

wobei $\tilde{p}_i$ bzw. $\tilde{q}_i$ Orthomorphismen auf E bzw. auf F sind.

Beweis: Sei u ein quasiinnerer Punkt in E, $v' \in F^{\sim}_{oo}$ strikt positiv. Wegen Lemma 2.6 ist $\mathcal{L}^r(E,F)$ vermöge Φ verbandsisomorph zu einem Ideal in $\mathcal{L}^r(E_u,(F,v')) = \mathcal{L}^r(C(K),L^1(Z,\mu))$, wo K und Z die Strukturräume von E bzw. von F sind. Ferner gilt $L^\infty(Z,\mu) = C(Z)$, $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(Z,\mu))$ kann deshalb gemäß 1.3 mit einem Band in M(K×Z) identifiziert werden. Daher ist das von $\Phi(T)$ erzeugte Ideal isomorph zu $L^\infty(K\times Z,m)$, wo m das $\Phi(T)$ entsprechende Radonmaß auf K×Z ist.
Sei $h \in L^\infty(K\times Z,m)$ die zu $\Phi(S)$ gehörende Funktion. Nach Lemma 3.2 findet man eine Folge (ϕ_k) in $C(K)\otimes C(Z)$, die in $L^\infty(K\times Z,m)$ ordnungsbeschränkt ist und h in der L^1-Norm approximiert. Wählt man eine punktweise fast überall konvergente Teilfolge $(\phi_{k_n}) =: (\phi_n)$, so ist (ϕ_n) in $L^\infty(K\times Z,m)$ ordnungskonvergent gegen h.
Den Funktionen ϕ_n entsprechen (siehe Bew. von 1.4) in $\mathcal{L}^r(C(K),L^1(Z,\mu))$ Operatoren des Typs $\sum \tilde{q}_i \circ \Phi(T) \circ \tilde{p}_i$, wo $\tilde{p}_i$ bzw. $\tilde{q}_i$ Multiplikatoren mit stetigen Funktionen auf C(K)

bzw. auf $L^1(Z,\mu)$ sind. Diese induzieren aber auf $\mathcal{L}^r(E,F)$ Operatoren $\sum \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i$, wobei $\tilde{p}_i$ bzw. $\tilde{q}_i$ jene Orthomorphismen sind, die durch Einschränkung bzw. Fortsetzung der entsprechenden Multiplikatoren entstehen (vgl. 0.6). Diese Operatoren sind nach Konstruktion in I(T) ordnungskonvergent gegen T.

3.4 Bemerkung: Die Tatsache, daß $\mathcal{L}^r(E,F)$ nur ein Ideal in $\mathcal{L}^r(E_u,(F,v'))$ ist, erklärt warum man obige Aussage nicht für das von T erzeugte Band B(T) erwarten kann. Zwar ist jeder Operator $R \in B(T)$ wieder Ordnungslimes einer Folge von Operatoren in I(T), hieraus kann man aber im allgemeinen nicht schließen, daß R ebenfalls durch Operatoren der Form $\sum \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i$ in der Ordnung approximiert werden kann.

Es ist unschwer zu erkennen, daß sich die im obigen Beweis angewandte Methode gleichermaßen dazu verwenden läßt, um eine allgemeinere Version von Satz 1.5 zu gewinnen. Es ergibt sich:

3.5 Satz: Seien E und F Banachverbände mit den Voraussetzungen (V), sei $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$. Dann ist $|T|$ Grenzwert einer in $I(|T|)$ ordnungskonvergenten Folge von Operatoren der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i,$$

wobei wieder $\tilde{p}_i$ und $\tilde{q}_i$ Orthomorphismen auf E und F sind.

Sei wieder u ein quasiinnerer Punkt in E, $v' \in F^*_{oo}$ strikt positiv. Weil $\Phi: \mathcal{L}^r(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}^r(E_u,(F,v'))$ die in 2.6 bewiesenen Eigenschaften hat, genügt es, entsprechend wie im obigen Beweis zu zeigen, daß $|\Phi(T)|$ Grenzwert einer in $I(|\Phi(T)|)$ ordnungskonvergenten Folge von Operatoren der Form $\sum \tilde{q}_i \circ \Phi(T) \circ \tilde{p}_i$ ist. Wieder ist $\mathcal{L}^r(E_u,(F,v'))$ ein Band in $M(K\times Z)$, $\Phi(T)$ entspreche hierbei dem Maß m.
Dann ist $I(|\Phi(T)|) = L^\infty(K\times Z,|m|)$ und m besitzt bezüglich $|m|$ eine Dichte $v \in L^\infty(|m|)$, für die $v^2 = \mathbf{1}$ gilt.
Man wähle zunächst zu v gemäß Lemma 3.2 eine Folge (ϕ_k) in $C(K)\otimes C(Z)$; eine Teilfolge $(\phi_{k_n}) =: (\phi_n)$ konvergiert punktweise fast überall gegen v und ist durch $c\cdot\mathbf{1}$ (c passend) beschränkt. Dies bedeutet, daß $\phi_n \cdot v$ in $L^\infty(|m|)$ gegen $\mathbf{1}$ ordnungskonvergent ist. Damit ist die Behauptung bewiesen, denn den Funktionen $\phi_n \cdot v$ entsprechen (vgl. Bew. von 1.5) Operatoren der Form $\sum \tilde{q}_i \circ \Phi(T) \circ \tilde{p}_i$, und der Funktion $\mathbf{1}$ entspricht der Operator $|\Phi(T)|$.

3.6 Bemerkung: Setzt man in den Sätzen 3.3 und 3.5 zusätzlich für E Ordnungsvollständigkeit voraus, so ist jeweils K Stonesch und man erkennt, daß man wie in Korollar 1.6 die Form der approximierenden Operatoren weiter vereinfachen kann zu $\sum \alpha_i Q_i \circ T \circ P_i$, wo P_i und Q_i Bandprojektionen in E bzw. in F und die α_i reelle Zahlen sind.
Auch hier handelt es sich für positives T bei den Operatoren $Q \circ T \circ P$ offensichtlich wieder um Komponenten von T, (vgl. Bem. 1.7).

Im nun folgenden zweiten Teil dieses Paragraphen, der seinerseits in drei Abschnitte gegliedert ist, sollen Anwendungen der Überlegungen des ersten Teils betrachtet werden. Das Augenmerk ist hierbei hauptsächlich auf kompakte reguläre Operatoren gerichtet. Ein großer Teil der hier für kompakte Operatoren formulierten Sätze läßt sich ebenso für allgemeinere Eigenschaften regulärer Operatoren (Bem. 3.12) beweisen. Auf solche möglichen Verallgemeinerungen wird jeweils hingewiesen, aber auf explizite Formulierung zugunsten der Übersichtlichkeit verzichtet.

Kompakte und kompakt majorisierte Operatoren in $\mathcal{L}^r(E,F)$.

Die nachstehenden elementaren und im wesentlichen bekannten Hilfssätze sollen einige von nun an häufig benutzte Argumente bereitstellen.

3.7 Lemma: Sei E ein Banachverband mit quasiinnerem Punkt u. Dann existiert auf E' eine strikt positive, ordnungsstetige Linearform.
Wenn E noch zusätzlich ordnungsstetige Norm besitzt, so existiert auch auf E eine strikt positive, ordnungsstetige Linearform.

Beweis: Weil $E \subseteq (E')^{\times}_{oo}$ ist und weil für alle $0 < x' \in E'$ $\langle u,x' \rangle > 0$ gilt ([20],II 6.3), ist die erste Behauptung klar. E besitze ordnungsstetige Norm, dann ist E_u der Dual von (E',u) (0.3). (E',u) besitzt eine schwache Ordnungseinheit ([20],II 6.6), diese definiert eine strikt positive und ord-

nungsstetige Linearform auf E_u und daher auch auf E.

3.8 Lemma: Sei E ein Banachverband, $I \trianglelefteq E$ ein abgeschlossenes Ideal. Wenn E' ordnungsstetige Norm besitzt, dann hat auch I' ordnungsstetige Norm.

Beweis: Ein Banachverband E besitzt genau dann ordnungsstetige Norm, wenn alle Ordnungsintervalle in E schwachkompakt sind. Bezeichnet $q:E' \longrightarrow I' = E'/_{I^\circ}$ die kanonische Abbildung, so ist q als Adjungierte der Einbettung von I in E intervallerhaltend (0.7), daher sind die Intervalle in I' schwachkompakt.

3.9 Lemma: Seien E und F Banachverbände, $T:E \longrightarrow F$ positiv. Sei für $0 \leq x \in E$ $\hat{T}_x : \overline{I(x)} \longrightarrow \overline{I(Tx)}$ der von T induzierte Operator. T ist genau dann kompakt, wenn $\hat{T}_x$ kompakt ist für alle $x \in E_+$.

Beweis: Sind alle $\hat{T}_x$ kompakt und ist (x_n) eine beschränkte Folge in E, so enthält (Tx_n) eine konvergente Teilfolge, denn es ist $(x_n) \subseteq \overline{I(u)}$ mit $u = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| 2^{-n}$, und T stimmt auf $\overline{I(u)}$ mit $\hat{T}_u$ überein.

Eine naheliegende Methode, die Ordnungskonvergenz in den Aussagen der Sätze 3.3 und 3.5 auf topologische Konvergenz zu übertragen, um damit etwa Kompaktheit von Operatoren behandeln zu können, besteht darin, Situationen zu suchen, in denen die Norm auf $\mathcal{L}^r(E,F)$ ordnungsstetig ist. Der folgende einfache Satz [16] gibt zwei solche Fälle an:

3.10 Satz: Wenn $E = C(K)$ ist und F ordnungsstetige Norm hat, oder wenn E' ordnungsstetige Norm hat und $F = L^1(\mu)$ ist, so besitzt $\mathcal{L}^r(E,F)$ ordnungsstetige Norm.

Beweis: Sei e die Ordnungseinheit von $C(K)$, (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}^r(E,F)$ mit $T_n \downarrow 0$. Dann gilt: $T_n e \downarrow 0$, also $\|T_n e\| \longrightarrow 0$ nach Voraussetzung, daher $\|T_n\| = \|T_n e\| \longrightarrow 0$. Im zweiten Fall betrachte man $F' = C(K)$, E' und $T_n' : F' \longrightarrow E'$. Es gilt $T_n' \downarrow 0$, denn $\langle x, T_n' y' \rangle = \langle T_n x, y' \rangle \longrightarrow 0$ für alle $x \in E_+$, $y' \in F' = F^*_{oo}$. Daher $\|T_n'\| = \|T_n\| \longrightarrow 0$.

Dieser Sachverhalt legt als Anwendung von 3.3 und 3.5 folgende Verallgemeinerung von Korollar 1.11 nahe:

3.11 Satz: Sei $E = C(K)$ und F besitze ordnungsstetige Norm, oder E' habe ordnungsstetige Norm und es sei $F = L^1(\mu)$ ((M,Σ,μ) ein beliebiger Maßraum). Dann ist der Raum der kompakten regulären Operatoren von E nach F ein Band in $\mathcal{L}^r(E,F)$.

Beweis: Wegen Satz 3.10 ist nur zu zeigen, daß der obige abgeschlossene Teilraum ein Ideal in $\mathcal{L}^r(E,F)$ ist. Seien $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$ und $0 \leq S \in \mathcal{L}^r(E,F)$ kompakt und sei $0 \leq R \leq S$. Nun ist zu zeigen, daß $|T|$ und R kompakt sind. Wegen Lemma 3.9 genügt es, dies für die Einschränkungen von $|T|$ und R auf ein $\overline{I(u)}$ für ein $u > 0$ zu beweisen. T und $|T|$ bilden $\overline{I(u)}$ nach $\overline{I(|T|u)}$ ab, R und S bilden $\overline{I(u)}$ nach $\overline{I(Su)}$ ab.

Die Eigenschaften: E ist AM-Raum mit Einheit bzw. E' hat ordnungsstetige Norm, übertragen sich auf $\overline{I(u)}$ (3.8); ebenso überträgt sich die Eigenschaft: F ist AL-Raum bzw. F hat ordnungsstetige Norm auf $\overline{I(|T|u)}$ und $\overline{I(Su)}$.
Also sind in allen Fällen die Voraussetzungen (V) der Sätze 3.3 und 3.5 erfüllt und die r-Norm ist ordnungsstetig auf $\mathcal{L}^r(\overline{I(u)},\overline{I(|T|u)})$ und $\mathcal{L}^r(\overline{I(u)},\overline{I(Su)})$. Mit 3.3 folgt, daß R kompakt ist und mit 3.5 folgt die Kompaktheit von $|T|$.

Dieser Satz zeigt sofort, daß unter diesen Voraussetzungen alle Kernoperatoren kompakt sind,(siehe Bem. 1.14).

3.12 Bemerkung: Man erkennt an obigem Beweis, daß die Kompaktheit der betrachteten Operatoren durch jede andere Eigenschaft $\mathcal{E}$ regulärer Operatoren ersetzt werden kann, die folgenden Bedingungen genügt:

(1) Die Operatoren mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ bilden einen abgeschlossenen Unterraum in $\mathcal{L}^r(E,F)$.

(2) Mit T hat auch jeder Operator $S \circ T \circ R$ ($0 \leq R:E_1 \longrightarrow E$, $0 \leq S:F \longrightarrow F_1$, E_1,F_1 beliebige Banachverbände, F_1 ordnungsvollständig) Eigenschaft $\mathcal{E}$.

(3) Für jeden Operator mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ gilt - mutatis mutandis - die Aussage von Lemma 3.9.

Offenbar sind etwa die schwache Kompaktheit oder die Dunford-Pettis Eigenschaft eines Operators T (vgl. 0.8) weitere Beispiele solcher Eigenschaften $\mathcal{E}$. Die Behauptung von Satz 3.11 gilt also für jeden, durch eine solche Eigenschaft $\mathcal{E}$ bestimmten Teilraum von $\mathcal{L}^r(E,F)$.

Betrachtet man die Voraussetzungen an E und F in Satz 3.11, so stellt sich die Frage, ob man dasselbe Resultat noch erhalten kann, ohne E oder F als konkreten Funktionenraum vorauszusetzen, sondern etwa nur zu fordern, daß E' und F ordnungsstetige Norm haben. Man erhält in dieser Situation den nachfolgenden Satz, der zuerst von P.Dodds und D.Fremlin in [5] bewiesen wurde. R.Nagel und U.Schlotterbeck lieferten bereits 1973 in [16] einen Beweis unter der zusätzlichen Forderung, daß T ein Kernoperator ist. Der vorliegende Ansatz erlaubt eine direkte Verallgemeinerung jenes Beweises.

3.13 Satz: Seien E und F Banachverbände so daß E' und F ordnungsstetige Norm besitzen. Sei $T:E \longrightarrow F$ positiv und kompakt. Ist S ein weiterer Operator mit $0 \leq S \leq T$, so ist auch S kompakt.

Beweis: Mit Lemma 3.9 genügt es wieder, Hauptideale in E und F zu betrachten, also kann man wegen Lemma 3.7 und 3.8 o.B.d.A. (V) für E und F voraussetzen.
Es genügt nun, für jede positive, normbeschränkte Folge (x_n) in E zu zeigen, daß (Sx_n) eine konvergente Teilfolge enthält, denn für eine beliebige beschränkte Folge betrachte man Positiv- und Negativteile.
Sei also $(x_n) \subseteq E_+$ normbeschränkt. Man wähle eine Teilfolge (x_i) in (x_n), so daß (Tx_i) in F konvergiert und so daß für den Grenzwert z und alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\|Tx_i - z\| \leq 2^{-i}$;

dann ist (Tx_i) in F majorisiert. Sei $v' \in F'_{oo}$ strikt positiv. $j \circ T: E \longrightarrow F \longrightarrow (F,v')$ ist kompakt, also ist mit 3.3 und 3.10 $j \circ S$ ebenfalls kompakt; folglich kann man in zwei weiteren Schritten eine Teilfolge (x_r) von (x_i) auswählen, so daß $(j \circ S)x_r$ in $(F,v') = L^1(\mu)$ gegen ein y ordnungskonvergent ist. Weil F ein Ideal in (F,v') ist (0.4), und weil mit (Tx_r) auch (Sx_r) in F majorisiert ist, liegt y in F und Sx_r konvergiert innerhalb F in der Ordnung gegen y. Nun ist die Behauptung bewiesen, denn F besitzt ordnungsstetige Norm.

3.14 Bemerkung: Es ist klar, daß unter den Voraussetzungen von Satz 3.13 auch jeder Operator $S \in I(T)$ kompakt ist, aber man kann eine Aussage wie in Satz 3.11 hier nicht mehr erwarten: sogar unter den Voraussetzungen: E und F reflexiv (sogar $E = F = l^2$), ist der Absolutbetrag eines kompakten regulären Operators im allgemeinen nicht mehr kompakt.([20] IV §1 Ex.2, [17] IV 3.3) Dennoch induziert die Kompaktheit von T eine gewisse Eigenschaft von $|T|$, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.(3.25)
Es sei noch darauf hingewiesen, daß die kompakten regulären Operatoren immer dann einen Unterverband von $\mathcal{L}^r(E,F)$ bilden, wenn schon alle kompakten Operatoren in $\mathcal{L}(E,F)$ regulär sind [8]. Diese Bedingung ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn F ein ordnungsvollständiger AM-Raum ist.([20])

Die Aussage von Satz 3.13 gilt auch, wenn man die Kompakt-

heit von T und S jeweils durch die Dunford-Pettis Eigenschaft ersetzt, jedoch läßt sich obiger Beweis nicht übertragen, (es genügt hier nicht, positive Folgen zu betrachten); der Satz wird im letzten Abschnitt bewiesen.
Die im folgenden Hilfssatz formulierte Beobachtung ist die Grundlage für eine Reihe der darauffolgenden Resultate.

3.15 Lemma: Seien E und F Banachverbände, (T_n) sei eine Folge positiver kompakter Operatoren von E nach F, für welche $T_n'' \downarrow 0$ gilt in $\mathcal{L}^r(E'',F'')$; dann konvergieren die T_n in der Operatornorm gegen 0.

Beweis: (vgl. [16]) Sei $U=\{0\leq x''\in E'':\|x''\|\leq 1\}$ und $V=\{0\leq y'\in F':\|y'\| \leq 1\}$. $U\times V$ ist ein kompakter Raum, wenn man U mit der von $\sigma(E'',E')$ und V mit der von $\sigma(F',F)$ induzierten Topologie versieht. Nun ist $T_n''(U) \subseteq F$ kompakt und jedes $\sigma(F',F)$-konvergente Netz in V konvergiert gleichmäßig auf $T_n''(U)$ ([21] III 4.6). Daher ist $\phi_n:(x'',y') \longrightarrow \langle T_n''x'',y'\rangle$ für alle $n\in\mathbb{N}$ eine stetige Funktion auf $U\times V$. Weil aber die ϕ_n punktweise monoton gegen 0 konvergieren, folgt mit dem Satz von Dini, daß $\|T_n\| = \|\phi_n\|$ gegen 0 konvergiert.

Hiermit erhält man in Verallgemeinerung eines Satzes von Nagel und Schlotterbeck ([16] Satz 5) sofort:

3.16 Satz: Seien E und F Banachverbände, so daß E' und F ordnungsstetige Norm haben und sei $T:E \longrightarrow F$

positiv. Ist T kompakt, so ist die r-Norm auf dem von T erzeugten Ideal $I_r(T)$ ordnungsstetig.

Beweis: Sei T kompakt und (T_n) eine Folge in $[0,T]$ mit $T_n \downarrow 0$. Für alle $0 \leq x \in E$, $0 \leq y' \in F' = F^{\sim}_{oo}$, $0 \leq x'' \in E'' = (E')^{\sim}_{oo}$ gilt: $\langle x, T_n' y' \rangle = \langle T_n x, y' \rangle \downarrow 0$ und $\langle T_n'' x'', y' \rangle = \langle x'', T_n' y' \rangle \downarrow 0$, daher $T_n'' \downarrow 0$ und die Behauptung folgt aus Lemma 3.15.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß T ein Kernoperator ist, gilt auch, wie man sich leicht überlegt, die Umkehrung der obigen Implikation, [16]. Dodds und Fremlin zeigen in [5], daß auch die schwächere Voraussetzung: T AMAL-kompakt hierfür ausreicht.

3.17 Bemerkung: In der Situation von Satz 3.16 ist mit 3.3 jeder Operator $S \in I(T)$ in der r-Norm durch eine Folge von Operatoren des Typs $\sum \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i$ approximierbar. Dies bedeutet, daß sich jede Eigenschaft $\mathcal{E}$, welche die Bedingungen in 3.12 erfüllt, von T auf S überträgt.

Potenzen kompakt majorisierter Operatoren.

In diesem Abschnitt soll die Diskussion kompakt majorisierter Operatoren weitergeführt werden, und zwar schließen sich Betrachtungen über die Komposition solcher Operatoren an. Herausragend ist in diesem Zusammenhang sicherlich das Resultat von Aliprantis und Burkinshaw [1], wel-

ches besagt, daß die Komposition dreier kompakt majorisierter Operatoren immer einen kompakten Operator ergibt. Es wird sich zeigen, daß Satz 3.3 und Lemma 3.15 dazu geeignet sind, dieses und weitere Resultate in einfacher Weise herzuleiten. Der nachfolgende Satz zeigt die hierbei verwendete Idee.

3.18 Satz: Seien E und F Banachverbände, welche die Voraussetzungen (V) (§2) erfüllen, G und H (H ordnungsvollständig) seien weitere Banachverbände. Ferner seien positive Operatoren $T_1:G \longrightarrow E$, $T_2:E \longrightarrow F$, $T_3:F \longrightarrow H$ gegeben, wobei T_1 schwachkompakt sei, $T_3'(H') \subseteq F_{oo}^{\times}$ gelte, und $T_3 \circ R \circ T_1$ für alle $0 \leq R \in I(T_2)$ kompakt sei. Seien schließlich S_i (i=1,2,3) Operatoren zwischen den jeweiligen Räumen mit $S_i \in [0,T_i]$ für alle i. Ist T_2 kompakt, so ist auch $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ kompakt.

Beweis: Nach Satz 3.3 gibt es Operatoren $V_n:E \longrightarrow F$ der Form $\sum \tilde{q}_i \circ T_2 \circ \tilde{p}_i$, und Operatoren $R_n \in I(T_2) \subseteq \mathcal{L}^r(E,F)$ mit $|V_n - S_2| \leq R_n$ und $R_n \downarrow 0$.
Nun gilt: $|S_3 \circ V_n \circ S_1 - S_3 \circ S_2 \circ S_1| \leq S_3 \circ |V_n - S_2| \circ S_1 \leq T_3 \circ R_n \circ T_1$, und die Behauptung ist bewiesen, wenn gezeigt ist, daß $\|T_3 \circ R_n \circ T_1\| \longrightarrow 0$ gilt, weil dann $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ r-Norm-Grenzwert der kompakten Operatoren $S_3 \circ V_n \circ S_1$ ist.
Hierzu betrachte man nun für $x'' \in G_+''$ und $y' \in H_+'$ den Ausdruck

$$\langle T_3'' \circ R_n'' \circ T_1'' x'', y' \rangle = \langle R_n'' \circ T_1'' x'', T_3' y' \rangle ;$$

$T_3'' \circ R_n'' \circ T_1''$ fällt monoton gegen 0, denn weil T_1 schwachkompakt ist, gilt $T_1''x'' \in E$, daher $R_n''(T_1''x'') = R_n(T_1''x'') \downarrow 0$ und nach Voraussetzung ist $T_3'y' \in F_{oo}^{\bullet}$. Mit 3.15 folgt, daß $T_3 \circ R_n \circ T_1$ gegen 0 konvergiert.

Als naheliegende Folgerung erhält man (vgl.[1]):

3.19 Korollar: Seien G, E und F Banachverbände, G' oder F habe ordnungsstetige Norm. $S_1, T_1 : G \longrightarrow E$ und $S_2, T_2 : E \longrightarrow F$ seien positive Operatoren, wobei T_1 und T_2 kompakt und $S_1 \in [0, T_1]$, $S_2 \in [0, T_2]$ seien. Dann ist $S_2 \circ S_1$ kompakt.

Beweis: Betrachten wir zuerst den Fall, daß F ordnungsstetige Norm hat. Mit Hilfe von Lemma 3.9 kann man o.B.d.A. in G, E und F quasiinnere Punkte voraussetzen, also erfüllen E und F die Voraussetzungen (V) (3.7).
Man setze nun in Satz 3.18 H = F und $T_3 = S_3 = id_F$. Weil $F' = F_{oo}^{\bullet}$ ist, sind die Voraussetzungen von 3.18 erfüllt und es ergibt sich, daß $S_2 \circ S_1$ kompakt ist.
Im Fall, daß G' ordnungsstetige Norm hat, erhält man die Behauptung ebenso nach Übergang zu den Dualen.

Das sich anschließende Resultat ist eine Verallgemeinerung des oben erwähnten Satzes von Aliprantis und Burkinshaw; es zeigt, daß für die Kompaktheit von $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ nicht die Kompaktheit aller majorisierenden Operatoren notwendig ist. Weiter unten wird eine nochmalige Verallgemeinerung bewiesen.

3.20 Satz: Seien G, E, F, H beliebige Banachverbände; $S_1,T_1:G\longrightarrow E$, $S_2,T_2:E\longrightarrow F$, $S_3,T_3:F\longrightarrow H$ seien positive Operatoren mit $S_i \in [0,T_i]$ für i=1,2,3. Sei weiter T_1 schwachkompakt und T_2 und T_3 kompakt, oder seien T_1 und T_2 kompakt und T_3 sei schwachkompakt. Dann ist $S_3\circ S_2\circ S_1$ kompakt.

Beweis: Mit Lemma 3.9 kann man in G,E,F,H quasiinnere Punkte voraussetzen. Auf H',F',E',G' existieren also strikt positive, ordnungsstetige Linearformen. Ist nun (y_n') eine normbeschränkte Folge in H', so sei $u' = \sum |y_n'|2^{-n}$ und $\widetilde{I(u')} =:\tilde{H}$, $\widetilde{I(T_3'u')} =:\tilde{F}$ usw., ferner seien $\tilde{T}_i$ und $\tilde{S}_i$ die jeweiligen Einschränkungen von T_i' und S_i'. Dann erfüllen insbesondere $\tilde{F}$ und $\tilde{E}$ die Voraussetzungen (V).

Wie im Beweis von 3.18 hat man, um die Kompaktheit von $\tilde{S}_1\circ\tilde{S}_2\circ\tilde{S}_3$ (und damit die Kompaktheit von $S_3\circ S_2\circ S_1$) zu zeigen, nur nachzuweisen, daß für jede Folge $(R_n)\subseteq I(\tilde{T}_2)\subseteq \mathcal{L}^r(\tilde{F},\tilde{E})$ mit $R_n \downarrow 0$ die Folge der $\|\tilde{T}_1\circ R_n\circ\tilde{T}_3\|$ gegen 0 konvergiert.

Hierzu betrachte man wieder für $\tilde{y}''\in \tilde{H}_+''$, $\tilde{z}'\in \tilde{G}_+'$ den Ausdruck

$$\langle \tilde{T}_1''\circ R_n''\circ \tilde{T}_3''\,\tilde{y}'',\,\tilde{z}'\rangle = \langle R_n''(\tilde{T}_3''\tilde{y}''),\tilde{T}_1'\,\tilde{z}'\rangle .$$

Die über T_1,T_2,T_3 gemachten Voraussetzungen übertragen sich auf $\tilde{T}_1,\tilde{T}_2,\tilde{T}_3$, daher ist $\tilde{T}_3''\tilde{y}''\in \tilde{F}$, also $R_n''(\tilde{T}_3''\tilde{y}'')\downarrow 0$ in $\tilde{E}$. Aber $\tilde{T}_1'\tilde{z}'$ ist ordnungsstetig auf $\tilde{E}\subseteq E'$, denn für $\tilde{x}=x'\in\tilde{E}$ und $\tilde{z}'=z''+(\tilde{G})^\circ$ ist $\langle\tilde{x},\tilde{T}_1'\tilde{z}'\rangle = \langle\tilde{x},T_1''z''+(\tilde{E})^\circ\rangle = \langle x',T_1''z''\rangle$, wobei wegen der (schwachen) Kompaktheit von T_1, $T_1''z''\in E\subseteq (E')^{\blacktriangle}_{oo}$ gilt. Also $\langle R_n''(\tilde{T}_3''\tilde{y}''),\tilde{T}_1'\tilde{z}'\rangle \downarrow 0$ und Lemma 3.15 liefert $\|\tilde{T}_1\circ R_n\circ\tilde{T}_3\|\longrightarrow 0$.

Als Konsequenz ergibt sich unmittelbar der folgende wohlbekannte Satz von Aliprantis-Burkinshaw [1]:

3.21 Korollar: Sei E ein beliebiger Banachverband, $T:E \longrightarrow F$ positiv und kompakt und sei $0 \leq S \leq T$.
Dann ist S^3 kompakt.

3.22 Bemerkung: Man beobachtet in den Beweisen von 3.18, 3.19 und 3.20, daß $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ bzw. $S_2 \circ S_1$ die Kompaktheit von dem jeweils mit T_2 bezeichneten Operator erbt, die Operatoren T_1 und T_3 sind im Grund von untergeordneter Bedeutung. Es ist klar, daß sich anstatt der Kompaktheit von T_2 jede Eigenschaft $\mathcal{E}$, welche die Bedingungen in 3.12 erfüllt, von T_2 auf $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ bzw. auf $S_2 \circ S_1$ überträgt; die Behauptungen von 3.18, 3.19 und 3.20 kann man also in diesem Sinne verallgemeinern, allerdings muß in 3.19 und 3.20 zusätzlich für $\mathcal{E}$ gelten: T besitzt $\mathcal{E} \Longleftrightarrow$ T' besitzt $\mathcal{E}$.
Man sieht im übrigen, daß man Satz 3.20 allgemeiner formulieren könnte, wesentlich ist neben der schwachen Kompaktheit von T_3 nur, daß $T_1''(G'') \subseteq (E')_{oo}^{\bullet}$ gilt und daß $\tilde{T}_1 \circ R \circ \tilde{T}_3$ kompakt ist für alle positiven R in $I(\tilde{T}_2)$.
Diese Überlegung in Verbindung mit der Tatsache, daß jeder kompakt majorisierte positive Operator ein schwacher Dunford-Pettis Operator (Def. in 0.8) ist [3], liefert die folgende Verallgemeinerung von 3.20:

3.23 Satz: Seien G, E, F, H Banachverbände und seien $S_1, T_1 : G \longrightarrow E$, $S_2, T_2 : E \longrightarrow F$, $S_3, T_3 : F \longrightarrow H$ positive

Operatoren mit $S_i \in [0,T_i]$ für i=1,2,3. Sind T_1 und T_3 schwachkompakt und ist T_2 kompakt, dann ist $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ kompakt.

Beweis: Man erkennt aus dem Beweis von 3.20, daß die Kompaktheit von T_1 bzw. von T_3 nur benötigt wird, um auf die Kompaktheit von $\tilde{T}_1$ bzw. $\tilde{T}_3$ und somit auf die Kompaktheit von $\tilde{T}_1 \circ R \circ \tilde{T}_3$ für alle $0 \leq R \in I(\tilde{T}_2)$ zu schließen. Aber jedes solche R ist durch einen kompakten Operator $k \cdot \tilde{T}_2$ ($k \in \mathbb{R}_+$) majorisiert, also schwacher Dunford-Pettis Operator (vgl. oben). Unter den vorliegenden Voraussetzungen sind $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_3$ schwachkompakt, daher ist $\tilde{T}_3 \circ R$ Dunford-Pettis und folglich $\tilde{T}_1 \circ R \circ \tilde{T}_3$ kompakt. Alles Weitere wie im Beweis von 3.20.

Zum Abschluß der Diskussion kompakter regulärer Operatoren soll noch kurz der Frage nachgegangen werden, welche Eigenschaften der Absolutbetrag eines kompakten regulären Operators besitzt. Wie bereits erwähnt (3.14), braucht $|T|$ nicht einmal in den einfachsten Fällen ($E=F=l^2$) kompakt zu sein. Man kann nun aber mit Hilfe des Approximationssatzes für $|T|$ (3.5) die Methode des Satzes 3.18 verwenden um zu zeigen, daß - in Analogie zu 3.19 - die Komposition von $|T|$ mit einem weiteren kompakt majorisierten Operator S wieder einen kompakten Operator ergibt.

3.24 Satz: Seien E und F Banachverbände, welche die Voraussetzungen (V) erfüllen, G und H (H ordnungs-

vollständig) seien weitere Banachverbände. Ferner seien Operatoren $S_1, T_1 : G \longrightarrow E$, $T_2 : E \longrightarrow F$, $S_3, T_3 : F \longrightarrow H$ gegeben, wobei $S_1 \in [0, T_1]$ und $S_3 \in [0, T_3]$ sei. T_1 sei schwachkompakt, T_2 kompakt und regulär und es gelte $T_3'(H') \subseteq F_{oo}^{\clubsuit}$; schließlich sei $T_3 \circ R \circ T_1$ für alle positiven $R \in I(|T|)$ kompakt. Dann ist $S_3 \circ |T_2| \circ S_1$ kompakt.

Beweis: Wegen Satz 3.5 gibt es Operatoren $V_n : E \longrightarrow F$ der Form $\sum \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i$ und Operatoren $R_n \in I(|T|)$ mit

$$|V_n - |T_2|| \leq R_n \quad \text{und} \quad R_n \downarrow 0.$$

Nun weiter wie im Beweis von 3.18.

3.25 Korollar: Seien G, E und F Banachverbände, F besitze ordnungsstetige Norm. Sei $T_1 : G \longrightarrow E$ positiv und kompakt, $T_2 : E \longrightarrow F$ regulär und kompakt und sei $S_1 \in [0, T_1]$. Dann ist $|T_2| \circ S_1$ kompakt.

Beweis: Mit Lemma 3.8 und 3.9 gelten für E und F o.B.d.A. die Voraussetzungen (V). Die Behauptung ergibt sich aus 3.24, wenn man $H = F$ und $T_3 = S_3 = id_F$ setzt.

Ersetzt man in 3.24 bzw. 3.25 unter Beibehaltung der anderen Voraussetzungen die Kompaktheit von T_2 durch eine beliebige Eigenschaft $\mathfrak{E}$, welche die Bedingungen (1) - (3) in 3.12 erfüllt, so überträgt sich $\mathfrak{E}$ ebenso auf $S_3 \circ |T_2| \circ S_1$ bzw. auf $|T_2| \circ S_1$.

Reguläre Dunford-Pettis Operatoren.

Abschließend soll den in 0.8 eingeführten Dunford-Pettis Operatoren noch besondere Aufmerksamkeit zukommen. Sie verdienen hier nicht zuletzt deshalb Interesse, weil sie im Verband $\mathfrak{L}^r(E,F)$ in mancher Hinsicht ein ähnliches Verhalten zeigen wie die kompakten Operatoren; es gilt etwa das Analogon von Kor. 3.21 (siehe [3] Th.3.1). Insbesondere gilt aber auch die zu 3.13 analoge Aussage. Zum Beweis dieses Sachverhaltes ist der folgende, von P.Dodds und D.Fremlin stammende Satz nötig, für dessen Beweis auf [5] verwiesen sei. Wir verwenden folgende, von P.Meyer-Nieberg [14] eingeführte Bezeichnung: Ein positiver Operator $T:E \longrightarrow F$ (E,F Banachverbände) heiße m-schwachkompakt, falls T normbeschränkte, positive, orthogonale Folgen in Norm-Nullfolgen abbildet. Hiermit gilt:

3.26 Satz: Seien E,F Banachverbände, F besitze ordnungsstetige Norm und $T:E \longrightarrow F$ sei positiv. T ist genau dann m-schwachkompakt, wenn die r-Norm auf $[0,T]$ ordnungsstetig ist.

Das vorab formulierte Lemma vereinfacht den Beweis des darauffolgenden Resultats.

3.27 Lemma: Sei E ein Banachverband dessen Dual ordnungsstetige Norm besitzt. Dann ist jede positive, orthogonale, normbeschränkte Folge in E eine $\sigma(E,E')$-Nullfolge.

Beweis: Angenommen, die behauptete Implikation sei falsch. Dann findet man eine orthogonale Folge (x_n) im positiven Teil der Einheitskugel von E und ein $x' \in E'_+$ mit $\|x'\| \leq 1$ und $0 < \gamma \leq \langle x_n, x' \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Nun ist die Abbildung $L: l^1 \longrightarrow E: \lambda = (\lambda_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ ein injektiver Verbandshomomorphismus, ferner gilt für $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$:

$$\|x\| = \| |x| \| = \| \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| x_i \| \geq | < \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| x_i, x' > | = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \langle x_i, x' \rangle$$

$\geq \|\lambda\| \cdot \gamma$; daher ist L ein Verbandshomomorphismus auf einen abgeschlossenen Unterverband von E. Dann ist aber wegen [12] 2.6 l^∞ ein abgeschlossener Unterverband von E', dies widerspricht der Ordnungsstetigkeit der Norm auf E'.

3.28 Satz: Seien E und F Banachverbände so daß E' und F ordnungsstetige Norm besitzen, sei $T: E \longrightarrow F$ positiv. Ist T ein Dunford-Pettis Operator, so ist jeder Operator $S \in I(T)$ ebenfalls ein Dunford-Pettis Operator.

Beweis: Weil für Dunford-Pettis Operatoren Lemma 3.9 ebenso gilt, kann man mit Hilfe von 3.7 und 3.8 wieder o.B.d.A. voraussetzen, daß E und F (V) erfüllen. Wegen Lemma 3.27 ist jede orthogonale, normbeschränkte Folge eine $\sigma(E,E')$-Nullfolge und wird daher von T auf eine Norm-Nullfolge in F abgebildet. T ist somit m-schwachkompakt, daher ist die r-Norm auf I(T) ordnungsstetig (3.26).
Nach Satz 3.3 ist S Ordnungslimes und folglich r-Norm-

Grenzwert einer Folge von Operatoren der Form $\sum \tilde{q}_i \circ T \circ \tilde{p}_i$ (aus I(T)), dies sind offenbar Dunford-Pettis Operatoren, daher ist auch S ein solcher.

3.29 Bemerkung: Im allgemeinen bilden auch die regulären Dunford-Pettis Operatoren keinen Unterverband von $\mathfrak{L}^r(E,F)$. Dies ist klar mit Bemerkung 3.14, denn in $\mathfrak{L}^r(l^2,l^2)$ fallen die Dunford-Pettis Operatoren offensichtlich mit den kompakten Operatoren zusammen. Aber auch hier gilt, wie bereits nach 3.25 angedeutet, daß für jeden regulären Dunford-Pettis Operator $T:E \longrightarrow F$ (F habe ordnungsstetige Norm), die Komposition $|T| \circ S$ mit einem kompakt majorisierten, positiven Operator $S:G \longrightarrow E$ wieder einen Dunford-Pettis Operator ergibt.

Literaturverzeichnis

[1] Aliprantis,C.D., Burkinshaw,O.: Positive compact operators on Banach Lattices, Math.Z. 174 (1980), 289-298.

[2] Aliprantis,C.D., Burkinshaw,O.: On weakly compact operators on Banach Lattices, Proc.Amer.Math.Soc. 83 (1981), 573-578.

[3] Aliprantis,C.D., Burkinshaw,O.: Dunford-Pettis operators on Banach Lattices, erscheint in Trans.Amer.Math.Soc.

[4] Bauer,H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter, Berlin (1974).

[5] Dodds,P.G., Fremlin,D.H.: Compact operators in Banach Lattices, Israel J.Math. 34 (1979), 287-320.

[6] Flösser,H.O.: Das Zentrum Archimedischer Vektorverbände, Preprint Nr.384 (1977), TH Darmstadt.

[7] Fremlin,D.H.: A positive compact operator, Manuscripta Math. 15 (1975), 323-327.

[8] Godefroy,G.: Sur les opérateurs compacts réguliers, Bull.Soc.Math.Belg. 30 (1978), 35-37.

[9] Kühn,B.: Banachverbände mit ordnungsstetiger Dualnorm, Math.Z. 167 (1979), 271-277.

[10] Lindenstrauss,J., Pelczynski,A.: Absolutely summing operators in $\mathcal{L}^p$-spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) 275-326.

[11] Lotz,H.P.: Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach Lattices, Trans.Amer.Math.Soc. 211 (1975).

[12] Lotz,H.P.: Minimal and reflexive Banach Lattices, Math.Ann. 209 (1974), 117-126.

[13] Luxemburg,W.A.J., Schep,A.R.: A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual, Proc.Kon.Ned. Akad.v.Wet. 81 (1978), 357-375.

[14] Meyer-Nieberg,P.: Über Klassen schwach kompakter Operatoren in Banachverbänden, Math.Z. 138 (1974), 145-159.

[15] Nagel,R., Schlotterbeck,U.: Integraldarstellungen regulärer Operatoren auf Banachverbänden, Math.Z. 127 (1972).

[16] Nagel,R., Schlotterbeck,U.: Kompaktheit von Integraloperatoren auf Banachverbänden, Math.Ann. 202 (1973), 301-306.

[17] Peressini,A.L.: Ordered Topological Vector Spaces, Harper&Row, New York (1967).

[18] Pietsch,A.: Operator Ideals, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1980).

[19] Saphar,P.: Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires, Studia Math. 38 (1970).

[20] Schaefer,H.H.: Banach Lattices and Positive Operators. Springer-Verlag, Berlin (1974).

[21] Schaefer,H.H.: Topological Vector Spaces. Springer-Verlag, Berlin (1971).

[22] Wolff,M.: A Radon-Nikodym theorem for operators with an application to spectral theory, Found. Quantum Mech. Ordered Lin. Spaces, Lecture Notes Phys. 29 (1974).

Lebenslauf

Am 14. Oktober 1952 wurde ich als Sohn des Bankrates Hermann Haid und dessen Ehefrau Else, geb. Zeller, in Stuttgart geboren.
1959 trat ich in die Volksschule in Höfingen, Kreis Leonberg, ein. Von 1963 bis 1970 besuchte ich das Albert-Schweitzer-Gymnasium in Leonberg und von 1971 bis 1973 das Dillmann-Gymnasium in Stuttgart, wo ich im Frühjahr 1973 die Reifeprüfung ablegte.
Nach Ableistung meines Wehrdienstes begann ich im Herbst 1974 an der Universität Tübingen mit dem Studium der Mathematik und Physik, welches ich im Oktober 1980 mit der Diplomprüfung in Mathematik abschloß.
Seither bin ich am Mathematischen Institut der Universität Tübingen als geprüfte wissenschaftliche Hilfskraft tätig.

Meine akademischen Lehrer in Mathematik waren die Herren S.Breitsprecher, K.P.Hadeler, H.H.Schaefer, U.Schlotterbeck, A.Schönhage und E.Siebert;
in Physik M.Dal Cin, W.Güttinger und F.Gönnenwein.